

華夏英才基金學術文庫

王 庚 编著

数学文化与数学教育

——数学文化报告集

科学出版社
www.sciencep.com

(O—1833.0101)



作 者 简 介

王庚，男，南京财经大学应用数学系教授，南京财经大学数学学科带头人，应用数学教研室主任。1998年被评为“全国教育系统劳动模范”，并被授予“全国模范教师”称号，2001年被评为“全国师德先进个人”。先后承担并完成多项省科研和教研立项课题，公开发表论文四十多篇，独撰和参编专著五部。



ISBN 7-03-012076-0
定 价：34.00 元

 華夏英才基金學術文庫

数学文化与数学教育

——数学文化报告集

王 庚 编著

本书得到南京财经大学出版基金资助

科学出版社

北 京

内容简介

"数学文化与数学教育"既涉及数学文化，如数学发展纵横谈、数学怪论、数学原子论——数与几何、微积分、橡皮膜上的几何学、古今数学之谜等，也涉及数学教育，如数学建模教学工程的理论与实践、关于大学数学教育的思考、高等数学的整体教学法、大学数学教学中数学建模的融入、大学数学素质教育的实施与开展、"怎样建模"表及其应用等。

本书选题精彩，组织得当，特别是选用了大量珍贵的图片资料，图文并茂，极具吸引力和可读性。本书另一特点是应用性强，信息量大，对于提高大学生和数学工作者的数学素质帮助极大，具有应用价值。这是一本适合当代大学生，尤其是数学专业大学生的好书，对于大、中学数学教师、广大数学爱好者也有很好的参考价值。

图书在版编目（CIP）数据

数学文化与数学教育：数学文化报告集/王庚编著．—北京：科学出版社，2004

（华夏英才基金学术文库）

ISBN 7-03-012076-0

Ⅰ．数… Ⅱ．王… Ⅲ．数学-文集 Ⅳ．01-53

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第078996号

策划编辑：林 鹏 胡 凯/文案编辑：邱 璐 贾瑞娜/责任校对：朱光光

排版制作：科学出版社编务公司/责任印制：钱玉芬

封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年1月第 一 版 开本：B5（720×1000）

2004年1月第一次印刷 印张：15 3/4

印数：1-3 000 字数：300 000

定价：34.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

前　言

收集在本书中的文章，是近十年来作者在高校或国内外会议上所作的学术讲座和报告，它们记录了作者的学术心得和思路。作者是一名数学教师，爱读各种类型的数学方面的文献，深受张奠宙教授、齐民友教授、胡炳生教授等学者的数学文化观念的影响，于是作者不把自己围在纯数学的圈子里，虽专长于几何，但兴趣十分广泛。先是对数理逻辑、数学哲学感兴趣，后对数学发展史、数学美学产生了浓厚的感情，近几年又钟情于数学建模、数学应用、数学软件、数学机械化及分形。作者注意到当代教育（包括数学教育）有培养"半个人"的倾向，如培养只懂科学、不懂人文，只懂理论、不懂应用的毕业生，为了培养"全人"，本书中的23个报告是对数学与人文的融合的多层面的探讨，并通过数学文化范畴，用讲座和报告这种亲和的形式来对此做出自己的努力。

数学文化与数学教育的关系是密切的：首先，数学作为一种文化在很大程度上影响数学教育；其次，数学教育应该是数学文化的教育，数学课程以及大、中学的数学教育的主体内容应包括各数学文化群体中那些共同的价值观念、数学知识、数学思想方法。因此在数学教育中如何呈现数学文化、使其反映文化的传递功能是十分重要的问题。

数学文化是人类文化的重要组成部分。但是长期以来数学成了一种看不见的文化却是众所周知的。课程标准规定的大、中学数学课程中不见数学文化的踪影，却成了题海的战场和应试教育的工具。事实上它们理应介绍数学发展的历史、应用和趋势，注意体现数学的社会需要、数学家的创新精神、数学科学的思想体系、数学的美学价值，以帮助学生了解数学在人类文明发展中的作用，逐步形成正确的数学观，并使之成为正确世界观的组成部分。

解决的办法之一是在数学教师和第二课堂中以学术报告和公开讲座的形式来探讨和传播数学文化，本书就是这样一种尝试。

本书共23个学术报告，均为作者近年来在不同场合所作的公开讲座、学术报告。它们涉及数学与哲学，数学与文化，数学与艺术，数学与科学精神，数学与应用，数学与计算机，数学与直觉（各种几何），数学与教育，数学与近代中国、数学问题、数学建模、数学软件等的关系，从全新的视角诠释了数学文化。

本书的出版一直是作者的心愿。这次的出版，作者衷心感谢华夏英才基金和南京财经大学出版基金的支持。由于这种尝试涉及内容多、范围广，不当之处还请读者批评指正。

王　庚

2003.6于南京

目　录

1　数学发展纵横谈

今天的整个数学领域看起来就像一片庞大的建筑群，其中每一幢建筑就是一部生动的历史教科书。这些古老而又在不断扩建的数学建筑业已成为了一块碑石，它记载着时代的兴衰、尘世的沧桑、社会的嬗变。只要它还矗立着，那些愉快的、甜蜜的、辛酸的、苦涩的乃至于充满血腥气的往事，都会不时在我们的脑海里泛起。

古希腊时期毕达哥拉斯的门徒希伯斯因发现了无理数并公开了这一发现而被该派处以死刑扔进了大海；数学史上第一位女数学家希伯蒂娅(曾在古希腊博学园教授过数学与哲学、测量过金字塔高度)因继续去研究院教课，传播她的数学思想而遭一群暴徒袭击，被砍去手脚投入火中烧死；人们自然也不会忘记从欧几里得年代到19世纪末的两千多年中，许许多多的数学家试证欧几里得第五公设，所走过的漫长而又艰苦的岁月，尤其是匈牙利的数学家俄·波尔约与约·波尔约父子两代人的艰辛努力。数学问题是数学的心脏，我们自然联想起数学家们是如何攻克古代几何三大难题、四色问题、哥尼斯堡七桥问题、哥德巴赫猜想、费马大定理和希尔伯特23个问题等，以及它们曾给数学带来的生机；数学史里的矛盾斗争也是很激烈的，它们常以一种“怪论”形式出现，曾导致过3次数学危机。在数学发展的历史长河里，有种种传奇，出现过许多次的大争论，发生过多桩冤假错案以及数学灾难。我们永远记得那些天才的数学家像高斯、阿贝尔、伽罗瓦、冯·诺伊曼、拉马努金、闵可夫斯基等的故事；那些多才多艺的人像达·芬奇、牛顿、高斯、欧拉、希尔伯特、庞加莱、外尔等的故事；那些各具特色的数学门派、数学家族，等等。它们在我们的脑海里翻腾起伏，不断地给我们以启迪和反思。

今天的数学是千百年来众多的先辈们艰苦卓绝奋斗的心、灵、血、汗、泪结晶积累而成的，它已成为拥有几百个分支的大学科。我们在中小学学习过算术、代数、平面几何、立体几何、解析几何、三角学，在大学里正学习着微积分、线性代数、空间解析几何、概率论、高等几何、复变函数等专门的数学课程。但又有谁能说清楚数学是什么？数学家是干什么的？

数学是什么？就像“盲人摸象”那个寓言所描述的，一个盲人摸着象的大腿说：“它像一个柱子”，另一个盲人摸着象的鼻子报告说：“它像一条蛇”，第三个盲人摸着一只象耳朵说：“它像一把扇子”。人们可根据自己对数学的理解做出不同的回答，其实在历史上许多数学家与哲学家对这一问题的看法也莫衷一是：

1）德国数学家弗立克斯·克莱因认为数学是自明之物的科学。

2）法国数学家拜节门·庞斯称数学为得出必然结论的科学。

3）英国数学家怀特海称数学为对于“一切类型的形式的、必然和演绎的推理”的研究。

4）古希腊亚里士多德则认为数学是对“量”的研究。

5）法国数学家笛卡儿又称数学是“序和度量”的科学。

6）英国培根称数学为一种使人“机敏精细”的学问。

7）德国大卫·希尔伯特称数学为“无实在含义的形式游戏”。

8）法国的布尔巴基们回答说：“数学，至少纯数学，就是研究各种结构的一门学问。”


贝特兰·罗素

9）英国的贝特兰·罗素称数学为“恒同于逻辑”的学科。关于数学他还说过一句意义玄妙的俏皮话：“数学这门科学是既不知道它说些什么，也不知道它所说的是否正确的一门学问。”

10）我们印象较深的是恩格斯曾说的“数学乃是关于物质世界的空间形式及其数量关系的科学”。

11）关于“数学是什么?”的最直截了当和自然的回答是：它是研究思想事物的。它不是铅笔和粉笔写下的符号，也不是物质的形状之集，而是思想之集合。

12）伽利略的名言：“数学是上帝用来书写宇宙的文字。”

以上这些各抒己见的高谈阔论，都很重要，但又都不全面。事实上，不论是对专家来说，还是对普通人来说，惟一正确全面的回答，不是哲学的几句高深玄妙的言论，而应该是数学发现本身中那些活生生的经验(即数学史)。就这一点来说，相比之下，下列的说法较为客观。

13）前苏联数学家柯尔莫哥洛夫就区分数学对象发展的几个阶段时指出：“①数学是作为关于数、量、几何图形的科学；②数学是作为关于量的变化及几何的映像的科学；③数学是作为关于现实世界一切普遍性、抽象化的数量形式及其空间形式的科学。”


柯尔莫哥洛夫

其实数学是人类活动的结果，具有明显的社会性，因此只有真正了解数学的历史的人才能对这一问题有较全面的认识。平常的一些数学课程使人产生了这样一种感觉：似乎数学家们几乎可以理所当然地从定理到定理，从概念到概念，从一般到抽象、从抽象到更抽象；在深奥的数学抽象王国里，数学家们都是天才、超天才，他们能克服任何困难，能轻松的巧架辅助线，巧设辅助函数，任何难题他们

都所向披靡，学生们被湮没在成串的定理、各种冗繁的计算之中，只能感叹数学太难了。培根说："读史使人明智"，数学发展史即数学史将告诉我们：数学家也是普通的人，不是神，他们中有男人、有女人，有十几二十岁的年轻小伙子、又有年过花甲的老人，有反应敏捷的、有反应迟钝的，有专业的、更有业余的，有普通的老百姓、有律师、有军人、有主教大人、有画家、有文学家、有皇帝、有工程师，等等，各行各业可谓三教九流。他们也曾经历过漫长艰苦的道路，也曾遇到过挫折、斗争，也跌过跤，也曾在迷雾中摸索前进，他们有伟大的一面，也有渺小的一面。数学史还将告诉我们：认真探索先人的数学创造的思想、数学发现的能力往往比仅仅掌握积累数学教科书上的知识更为重要。

数学史是研究数学发展进程和规律的学科，故此它对于了解课堂教学内容的历史背景，提高教与学的兴趣；对于培养一个未来合格的数学应用工作者；对于指导数学的进展和预见数学的未来，都有十分重要的意义。

其实任何一种事物都有其自身发展的规律性，有些事物从外表上看起来似乎杂乱无章，但实际上都是按照某种规律发展着的，数学也不例外，它也有自身的发展规律。

数学史主要研究数学规律的发展。包括研究方法、历史背景、学术交流、哲学对数学发展的影响、数学与实践的关系，等等。因此从认识上看：数学是第一个层次、数学史是第二个层次，显然后者是以前者为基础的，所以数学史的对象是历代的数学成果和影响数学发展的各种因素。

数学史已成为一门学科，它一般分为中国数学史和外国数学史。由于它的重要性，早在19世纪，西方有些国家的大学就开设了数学史课程，目前在这些国家开设数学史课的大学极为普遍，美国有的大学还设置了数学史系。20世纪50年代，我国也曾计划把数学史列为高等师范院校的选修课，但由于师资和教材的原因，这个计划并没有得到实施。近年来，数学素质教育受到人们的关注，情况有了很大好转，开设数学史课的大学逐年增加，关于数学史的研究也有增多。

数学史的内容庞大、繁杂，为使大家能窥视其中一斑，下面谈谈数学发展史的几个规律。

一、数学发展的四部曲

数学这部交响乐由四个乐章组成，它们是精确数学、随机数学、模糊数学、突变数学。可以说数学思想方法的发展经历了这么几个阶段。

它们的产生发展来源于生产实际，大千世界、自然现象形形色色、纷繁复杂，如果按质分类，大体可归四大类：必然现象、或然现象、模糊现象和突变现象。

(一) 必然现象与必然数学(精确数学或经典数学)

必然现象的例子非常多，如金属加热会膨胀、冷却会收缩；异性电荷互相吸引、同性电荷互相排斥；氢在氧气中燃烧生成水。

具体的例子：熊熊炉火，锤炼着一把刀具。当把刀具拿回实验室时，它的温度为150℃，10分钟后则为100℃。那么，20分钟后刀具的温度应为多少呢？(设实验室空气的温度为24℃)显然这个温度是惟一确定的。总之，必然现象是指如果事物变化服从确定的因果关系，由前一时刻的运动状态可推知后一时刻的运动状态。

为描述和研究现实世界的必然现象及其规律，就产生了必然数学。它包括算术、三角、几何、代数、微积分、微分方程论、积分方程论和函数论等分支学科。

例如上述的具体例子，建立的数学模型是微分方程$\frac{du}{dt}=-k(u-u_a)$，其中u为刀具在t时的温度，$k>0$为一常数，u_a为室温。解此微分方程可算得20分钟后刀具的温度是64℃。

精确数学最成功的例子，便是根据万有引力定律推算出行星环绕太阳运行的轨迹，甚至还预测到海王星和冥王星。在数学史上，这一杰出成就，曾一度使人们认为一切自然现象都可以用精确数学来描述。

实际上在第一乐章里数学思想曾经历过两次重大转折。

1. 从算术到代数

这一重大转折主要表现为算术解题法到代数解题法的演进。

算术解题法

这是我们小学数学的内容，它的特点是只限于对具体的、已知的数进行运算，不允许有抽象的未知数参加。

它的解题步骤为：①依据问题的条件列出关于具体的已知数的算式；②通过四则运算求出算式的结果。

它的困难是：在对于那些具有复杂数量关系的应用题第①步难办到。于是产生了：

代数解题法

这是我们小学高年级和初中数学的内容，其特点为：未知数与已知数有着同等的权利(即可以移项、+、-、×、÷等)，而方程只是一种条件等式。

其步骤为：列方程、解方程；而解方程的过程是未知数和已知数进行重新组

合的过程，即未知数向已知数转化的过程。

总之，算术与代数作为最基础而又最古老的两个分支学科，有着不可分割的亲缘关系，算术是代数产生的基础、代数是算术发展到一定阶段的必然产物。

方程在数学中占有重要的地位，代数解题法对后来整个数学的进程产生了巨大的影响，其中最典型的应首推常量数学的形成。常量数学是以常量即不变的数量和固定的图形为其研究对象，主要内容是初等数学包括算术、初等代数、初等几何、三角。

2. 从常量数学到变量数学

运用常量数学可以有效地描述事物和现象相对稳定的状态。但对于描述运动和变化，却是无能为力的。

16、17 世纪自然科学提出了大量数学问题，大体可分为以下 5 种类型：

1）非匀速运动物体的轨迹(天文学)；

2）求变速运动物体的速度或路程(物理学)；

3）求曲线在任一点的切线(光学、力学)；

4）求变量的极值(力学、天文学)；

5）计算曲线长度、曲边形面积、曲面体体积、物体的重心、变密度物体的重心以及大质量物体之间的引力等。

这些问题一个共同的特征就是要以“变量”作为其研究对象，于是便产生了从量上描述事物的运动和变化规律的数学部分——变量数学。

变量数学产生于 17 世纪，大体上经历了两个具有决定性的重大步骤：第一步：解析几何的产生；第二步：微积分的创立。

变量数学的产生，使数学自身在思想方法上发生了重大的变革。新的数学分支学科如雨后春笋般地涌现出来，诸如：解析数论、微分几何、常微分方程论、偏微分方程论、积分方程论、级数论、差分学、实变函数论和复变函数论等变量数学成为了一个庞大的家族。而常量数学和变量数学统称为精确(必然、经典)数学。

(二) 或然现象与随机数学

或然现象(偶然现象、随机现象)比如：夏日的夜晚，星空灿烂。当你仰望苍穹，欣赏这自然美景的时候，有时会发现突然一道亮光划破夜空，这是流星闪现，但是究竟在何时能够观察到流星的出现？当你迎着朝阳，走在上课路上，沿途就会碰到人，究竟多少人？他们是谁？

据报道：美国北卡罗来纳州的威尔明市，1982 年 7 月 4 日有一名叫拉夫尔·

伯特伦·威廉斯四世的婴儿在新汉诺佛纪念医院降生；巧合的是，他的父亲是1950年7月4日诞生的；他的祖父也是1920年7月4日出生，而他的曾祖父同样也是7月4日出世的，而那天又正好是美国独立一百周年纪念日——1876年7月4日，这可谓惊人的巧合。

三百多年前，一些赌徒问著名的科学家伽利略：一次掷三粒骰子并计算总点数，为什么总和为10的情况比出现总和为9的情况要多呢？

1654年，一个赌徒问数学家帕斯卡：把两粒骰子投掷24次，出现两个6的情况有多少？

平日里摸牌、抓阄、有奖储蓄、买彩票、打麻将、投骰子等等都与随机现象密切相关。

总之，随机现象是指事物的变化发展不受单值的确定的因果关系的制约，而是具有几种不同的可能性，究竟何种结果，有随机性、偶然性。

水分子的运动是无规则运动，完全是随机的。但我们知道：水在1个大气压下，加热到100℃，就要化为水蒸气。

婴儿诞生，可能是男孩，也可能是女孩；但就全世界来说每天诞生的男女孩总数几乎是相等的；根据数学家拉普拉斯的统计：一个婴儿是女孩的可能性是22/43。上面提到的美国惊人巧合之事，曾引起了北卡罗来纳大学一位数学家的兴趣，他专门为此进行了计算，最后得出结论：同一家族的四代人在同一日期出生的现象，约117亿人中才有一例。对于"巧合之谜"，《科学美国人》杂志的数学专栏编辑马丁·加德纳认为，每天在几十亿人身上发生几千万桩大大小小的事件。因此，时而出现一些令人惊诧的凑巧事件是不可避免的。巧合只不过是"大数规律"在起作用。

由此可见，在纷乱的大量偶然现象背后，往往隐藏着必然的规律。一位研究学者认为，这种不可思议的巧合现象表明，概率论能够以不可思议的精确性来预料出大量个别事件的总结果，而单靠一件件个别事件却是无法预示出总结果的。换言之，我们面临着许多许多产生确定性结果的非确定性事件。

探索这些规律，利用这些规律来为人类服务，正是随机数学的任务。随机数学主要包括概率论、随机过程理论、数理统计学。

另外，或然数学与必然数学、自然科学和社会科学相互作用产生出许多新的学科。如平稳随机过程论、马尔科夫过程论、随机微分方程论、多元统计分析、试验分析、统计物理学、统计生物学、统计医学和概率逻辑等。

（三）模糊现象与模糊数学

模糊现象又称为不分明现象。比如：父母双亲的基因遗传使子女保留了双亲

的共同特征，然而子女并不完全像他们的父母；一棵枝叶茂密的参天大树，尽管它的叶子有着共同的特征，可是其中绝无两片完全一模一样的树叶；同样的一个字，由不同的人写出来，或者由同一个人写上千百次，它们都不会绝对相同；同一批出厂的合格产品，看上去是一个模样，可仔细考察起来竟然千差万别；电视图像清晰还是不清晰，不存在什么严格的界限；天气预报时，在晴天与多云之间不存在明确的界限；人类思维中，“红色”与“蓝色”、“暖和”与“较冷”、“很高”与“很矮”、“浓和淡”、“明与暗”、“胖与瘦”、“老年与年轻”、“美与丑”等也是如此。

总之，模糊现象是指客观事物界限不分明的量和性质，这时要处理模糊量及其关系变化规律。明晰数学(必然数学与或然数学)就不适用了，1965 年，美国加利福尼亚大学自动控制专家 L. A. 查德(L. A. Zadeh)第一次提出了“模糊集合”的概念，从而为模糊数学的诞生奠定了基础，模糊数学便由此产生了。三十多年来，模糊数学理论上正在不断完善，应用也日益广泛。



L. A. 查德

模糊数学找到了一个切实可行的方法。即用数量表示一个事物属于某个模糊概念的程度，即隶属度，以此说明该事物能否包括在那个模糊概念的论域之中。

例如，以年龄为论域，取 $U=[0, 100]$。查德曾给出“年老” $\underset{\sim}{Q}$与“年轻” $\underset{\sim}{y}$两个模糊子集的隶属函数如下

$$U_{\underset{\sim}{Q}}(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 50\\ \left(1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}, & 50\leqslant x\leqslant 100\end{cases}$$ (如图 1.1)

$$U_{\underset{\sim}{y}}(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 25\\ \left(1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right)^{-1}, & 25\leqslant x\leqslant 100\end{cases}$$ (如图 1.2)

从图中可以看出，凡小于 25 岁和大于 75 岁，都分别明晰地属于“年轻”和“年老”，而大于 25 岁小于 75 岁之间的人都处于“年轻”到“年老”的中间过渡状态。

如把 55 岁、60 岁、65 岁分别代入 $U_{\underset{\sim}{Q}}(x)$分别得：0.5、0.8、0.9，这说明 55 岁、60 岁、65 岁的人属于“年老”范畴的程度分别为：0.5、0.8、0.9，而 70 岁则达 0.97 以上了。

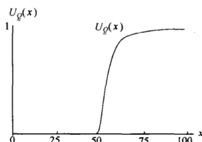


图 1.1

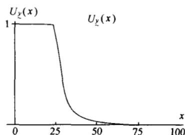


图 1.2

模糊数学在发展过程中，不断提出了新的应用研究课题，如模糊信息、模糊控制、模糊规划与决策、模糊语言、模糊逻辑等。如今，模糊数学已经越来越广泛地应用到自然科学乃至社会科学的各个领域，如模糊技术可将红绿灯改造得更灵活、模糊智能家电(模糊控制的洗衣机、以模糊规则为基础的照相机、模糊感应的空调等)使生活更方便、航空航天中的火星探测器离不开模糊技术、在机器人足球赛中模糊数学更是大展身手等等。查德指出模糊数学在未来最重要的应用领域，应该是计算机模拟识别和人工智能方面。

记得周恩来年轻时曾写过一首诗《雨中岚山——日本京都》“人间的万象真理，愈求愈模糊；模糊中偶然见着一点光明，真愈觉姣妍”。

(四) 突变现象与突变理论(也称灾变数学)

突变现象比如：1959 年，美国的一架 F-111 飞机在俯冲拉起时，由于飞机的左翼突然脱落，造成机毁人亡；

水的温度不断升高，水的密度便缓慢地变小，当水温达到 100℃ 时，水的密度突然小到蒸汽出现的程度；

两块乌云的电荷不断累积，当到了一定的数量界限时便击穿空气，于是电闪雷鸣发生了；

地应力不断增加，当它达到了一定的程度时，就会突然地动山摇，地震爆发了。

这些现象的研究不论是明晰数学还是模糊数学都不适用了。法国数学家伦尼·托姆(Rene Thom, 1923～)在这一方面做了开创性的工作。1968 年，托姆发表了他的第一篇论文，1972 年，他出版了《结构稳定性和形态发生学》一书，系统阐述了突变论。托姆经过数学推导证明：渐变的控制因素(控制空间)产生的突变行为(行为空间)，在控制时间不超过四维的情况下，自然界的各种突变可以

结为七种基本突变模式，即折叠型、尖点型、燕尾型、蝴蝶型、双曲型、椭圆型、抛物型。


伦尼·托姆

托姆的这一重大发现立即轰动了数学界，有人把这个理论捧上了天，说它可以和牛顿的《自然哲学的数学原理》相媲美，因为牛顿的理论解释了所有连续的、渐变的现象，而托姆的突变理论解释了所有的不连续的、突变的现象。有人甚至赞誉它为"数学界的一次智力革命——微积分以后最重要的发现"。

突变以奇点理论为其数学基础，运用拓扑学、结构稳定性等数学工具，以形象而生动的模型来把握事物的量质互变过程。

精确数学—随机数学—模糊数学—突变理论(每部分又分为连续与离散的方面)，就是迄今为止的数学发展史。从横的方面看：精确数学主要应用在自然科学领域；随机数学开始向社会科学渗透；而模糊数学则将成为思维科学中的数学工具；突变理论则向各个领域渗透(如经济、胚胎学)。这样纵横捭阖，合奏出一首壮美的大型现代立体声交响乐。

二、数学发展历史的分期(在时间方面)

整个数学发展史可简单分为三个时期，即古代数学时期(原始人时代到 17 世纪初)(主要成果为常量数学、初等数学)、近代数学时期(17 世纪到 19 世纪上半叶)(主要成果为变量数学大部分)、现代数学时期(19 世纪至今)，这种分期与总论中柯尔莫哥洛夫的数学定义是一致的。

这种分期就好像研究"飞"：第一阶段，研究飞鸟的几张相片；第二阶段，研究飞鸟的一部电影；第三阶段，研究飞鸟、飞机、飞船等的一般性质。

这里再介绍一种更细致的数学史分期。

分期的原则：①数学知识的性质和结构；②数学的社会功能和社会地位。

数学史分期与特点：

1）萌芽时期，大约在公元前五六世纪以前。

这个时期算术、几何开始逐渐形成，特点是有简单的推理。

2）初等数学时期，大约是公元前 5 世纪到公元 17 世纪中叶，前后延续了两千多年。

这个时期算术、代数、几何、三角等都成为比较独立的学科，以几何逻辑为其突出特色。另外素数理论、弓形面积计算公式、二项式定理、对数、十进对数、无理数、复数等已出现。

3）变量数学时期，大约是 17 世纪中叶到 19 世纪 20 年代。其特点与前面

"常量数学到变量数学" 一致。

4）近代数学时期，(19 世纪 20 年代——二次世界大战)

这一时期的特点：

①几何的质变：欧氏几何到非欧几何，现实空间到抽象空间。

②代数的质变：群、环、域等代数系统结构的研究，标志是伽罗瓦群论。

③分析基础的形成：极限的精确化，康托尔的集合论等。

5）现代数学时期(20 世纪 40 年代以来)

这一时期的特点：

①纯粹数学方面出现了一些重大突破，如连续统假设，大基数问题，广义函数论，数理逻辑中的"力迫法"、"模型论"、纤维丛理论，数论中用李群的无限维表示法。

②应用数学分支的大量涌现和发展，如计算数学、对策论、控制论、生物数学、数学金融学、数理经济学等。

③系统科学的出现。

④各种新思潮的出现，如非标准分析、模糊数学、突变理论、结构数学、构造数学、分形几何、混沌学等等。

⑤计算机科学和人工智能(如智能算法等)的发展。

⑥证明的机械化。

总之，从时间上来看，数学史是一个由简单到复杂、由低级向高级、由特殊到一般的过程。

三、数学是矛盾斗争的历史(在哲学方面)

从哲学上看，数学是现实世界量的侧面在人们头脑中的反映，因为现实世界是充满着矛盾的，所以数学也必然充满了矛盾。正像恩格斯所指出的，不仅高等数学充满着矛盾，"连初等数学也充满着矛盾"。

比如：正与负、直与曲、平行与相交、已知与未知、常量与变量、有限与无限、连续与不连续、精确与近似、必然与或然、加法与减法、乘法与除法、乘方与开方、微分与积分、几何变换及其逆变换、数学算子与逆算子、实在的与虚构理性的，等等。当然在整个数学发展过程中还有许多深刻的矛盾。例如：有穷与无穷、连续与离散，乃至存在与构造、逻辑与直观、具体对象与抽象对象、概念与计算，等等。它们可以说贯穿整个数学发展史，而这些大大小小的矛盾的产生，发展到激化，到解决，总是不断为数学产生新的概念、新的方法、新的理论，也可能产生新的危机。

上述提到的深刻的矛盾曾激化到涉及当时的整个数学基础，曾产生了数学史

上的三次大的危机。(第2讲中介绍)

危机实际上是一种激化的、非解决不可的矛盾，而这些矛盾的消除，危机的解决，往往给数学带来新的内容、新的进展，甚至引起革命性的变革，这也反映出矛盾斗争是事物发展的历史动力的基本原理。

四、数学的比喻

法国的布尔巴基们曾给数学打过一个比喻：“数学好像一座大城市，它的郊区在周围的土地上不停地有点杂乱无章地向外扩展。同时市中心隔一段时期就进行重建。每一次重建设计更加明确、布局更加雄伟，总是以老住宅区和它们迷宫式的小街道为基础，通过更直、更宽、更舒适的林荫大路道通往四面八方。”

也有人把数学看做由以纯粹数学为核心的许多同心层组成。在这个核心内可辨认的分支学科已将近一百种。再加上外层的纯粹数学与应用数学混合扩散界面上的应用数学，如统计数学、计算数学、运筹学和理论物理等，则其分科的数目不下几百个。

前些年有人常用一棵大橡树来形象地描绘数学。但是今天的数学用橡树式的数学树是不能真实地反映其全貌的，数学工作者们提出另一种理想的树——印度榕树，并用它来做这种描绘，这种树有许多树干，并不断生长出新的树干，树干上的分枝生长伸开垂向地面，植入地面后又长出新根，其后的几年更加粗壮，分枝本身也成为长满了分枝的树干，每一个树干再垂下分枝植入地面。一方面在地面上新枝往上长并向各个方向交叉，长出了犬牙交错的几百个形形色色的分枝和奇花异果，另一方面在地面下各种新旧根往下生长，盘根错节牢牢地扎根于大地。

我国著名数学家齐民友在1958年所写的《竹子的哲学》一文中认为数学的生长像竹子，根在大地，然后自己一节一节向上长，间或爆出新笋，长成新竹。若干年之后，竹子开花，结成种子，重回大地。这一比喻，何等贴切。

今天的基础数学像：初等数学(算术、初等代数、初等几何、三角学)、集合论、实数理论、几何基础等，都是古典数学、近代数学、现代数学的根，而老三高(高等几何、微积分、线性代数)以及新三高(泛函分析、抽象代数、拓扑学)、数理逻辑学等，都是古今数学的树干，而数论、李代数、环代数、格论、范畴与函子论、实分析、巴拿赫理论、复分析、单(多)复变函数、亚纯函数论、代数几何、微分几何(局部、整体)、微分拓扑学、代数拓扑学、黎曼几何学、Mose理论，对策论、优选法、统筹法、计算机算法语言、生物数学、数学教育学、数学心理学、数学哲学、数学美学等，都是古今数学的枝叶。除了这些枝枝叶叶外还有一些奇花异果，如模糊数学、非标准分析、突变理论以及它们的应用，老三论(耗

散结构论、协同论、突变论)、新三论(系统论、信息论、控制论),等等。面对这样广阔的“数学海洋”,近半数的读书人“望洋兴叹”,事实上,读完高中数学课程的人大约只达到17世纪中叶的数学水平,一般大学毕业生大约达到18世纪和19世纪初的数学水平,而一般大学数学系毕业生,也只达到18世纪的数学水平而已。我们的数学及相关课程与相关讲座意在向大家揭示数学是一门纯粹科学、一门应用科学、一个决策和行动的工具、一门艺术,也是现代教育最重要的学科之一。

数学是看不见的文化,在人类的智力攀登中,数学不但是理性的阶梯,也是神秘思想的阶梯;数学可看做文化的最高要求。它也是人类精神最精致的花朵之一,是世世代代“一砖一瓦”建造起来的一座永恒的知识大厦。

我们当中有谁不想揭开数学未来的帷幕,解决千古之谜,挖掘各种数学宝藏,了解今天的数学王国是如何建立起来的?经验已证明适当的途径就是研究这门科学的历史和现实,让我们手携手踏着这条大道走向数学光辉灿烂的明天!

参考文献

克莱因 M. 1979. 古今数学思想(1~4册). 张理京, 张锦炎译. 上海:上海科学技术出版社
曼凯维奇 R. 2002. 数学的故事. 冯速等译. 海口:海南出版社
欧阳绛. 1997. 数学的艺术. 北京:农村读物出版社
斯蒂恩. L. A. 1982. 今日数学——随笔十二篇. 马继芳译. 上海:上海科学技术出版社
张楚廷. 2000. 数学文化. 北京:高等教育出版社
张奠宙. 2002. 20世纪数学经纬. 上海:华东师范大学出版社

2 数学怪论

数学史是矛盾斗争的历史，数学的内容中包含着各种矛盾对象，它们中有许多重要的、深刻的，也有许多一般的，比如：在数学概念方面有正与负、直与曲、平行与相交、已知与未知、常量与变量、有限与无限、离散与连续、精确与近似、必然与或然；在数学运算方面有加法与减法、乘法与除法、乘方与开方、微分与积分、映射与逆映射等。在数学发展上这些矛盾曾不断地以一些颇为有趣的“怪问题”的形式出现，这些问题有的似是而非，有的似非而是，有的模棱两可、扑朔迷离，使人真伪难辨，诸如此类的怪问题我们不妨把他们称为“数学怪论”。

数学怪论也常常被叫做“谎言、佯谬、悖论、诡辩论、逆论、反论、悖谬、谬论，等等”。

下面我们介绍几个著名而极有趣的奇谈怪论，对于某些怪论还将分析所反映的矛盾对数学曾经产生的巨大影响，最后再对一种特殊的怪论即数学悖论作一些介绍与分析。

一、数学奇谈怪论一瞥

(一) 负数比无穷大还要大

这是随便开开玩笑吗？不，这是大名鼎鼎的英国数学家、牛津大学名教授、英国皇家学会创始人之一瓦里士(Wallis, 1616～1703)提出来的，关于负数的概念和运算早在我国古代数学著作《九章算术》中就有了，今天初中学生就已经很好的掌握它们。可是在欧洲，对于负数的认识和接受却显得极为缓慢，直到十七八世纪还有些数学家对它表示怀疑。瓦里士在《无穷大的算术》一书中，居然得出了“负数比无穷大还要大”的怪论，他的推导是这样的：比如一个分式$\frac{10}{x}$，当分母x取值10，1，0.1，0.01，0.001，…时，分式的值分别是1，10，100，…规律是分母越小，分式的值越大。当分母接近0的时候，分式的值变成“无穷大”。这时如果分母的值再进一步变小，即变到小于0的时候，那么分式的值就变得比“无穷大”还要大。



瓦里士

而我们知道，分母比 0 小的时候分式$\frac{10}{x}$的值是一个负数。所以负数应该是一个比无穷大还要大的数。

瓦里士的这个论证当然是极其荒谬的，它的毛病是显然的，在数学史中还有人应用这种思想证明“$-1:1\neq 1:(-1)$”，理由是较小的数与较大的数之比，怎么能等于较大的数与较小的数之比呢？这是谎言、谬论、诡辩，它反映了正与负、有限与无穷的矛盾。

(二) 关于“角”的争论二则

在日常用语中，角是指动物头上的角，比如：牛角、羊角等。

古希腊有个诡辩学派运用形式逻辑的三段论提出一则“诡辩论”，即“人人头上有角”，推导是：凡是你所没有丧失的，就是你的(大前提)。你没有丧失角(小前提)，所以你有角(结论)。

很明显，这个结论是错误的，它违反了同一律，即在逻辑上“偷换概念”。事实上诡辩者在这里有意地在不同意义上两次使用了“丧失”这个概念，亦即用了同一概念表达了两个不同的对象。说得仔细点，那就是在大前提中“没有丧失”一词是指我们原来所有而未曾失掉的东西而言，而在小前提中，“没有丧失”指的乃是我们从来未曾有过、根本无所谓失掉的东西。

在数学上角是指角度，争论是“牛头角是不是角”。牛头角是这样一种“角”，如图 2.1 所示，圆 O 在A 有一条切线 TA，切线 TA 与弧AB 所夹的空间部分(希腊人称它为“牛头角”)。

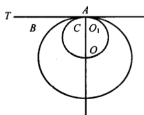


图 2.1

古希腊时代著名学者欧几里得(Euclid，公元前 330～公元前 275)在他编著的《几何原本》里还给出了一个关于“牛头角”的十分含糊的命题：半圆和切线的夹角小于直线间的任何锐角。

这就给后来的数学家引出了两个问题：

①“牛头角”到底算不算真正的角？②它能不能进行度量？

这两个问题使许多数学家感到十分头痛。数学家卡丹、韦达、伽利略、瓦里士都曾为它进行过热烈的争论。

第一种观点认为：“牛头角”的值恒为 0°，即“牛头角”是角。

理由是：过 A 点作圆 O 的切线总是与 TA 重合，两直线重合时其角度应为 0°。

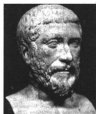
第二种观点认为：“牛头角”不是角。

理由是：如图，当圆的半径缩小的时候，比如为圆 O_1 时，“牛头角”显然

增大了。如果说“牛头角”恒为0°，两个“牛头角”就不应该有大小的区别，而应该完全重合，但事实上并非如此。

分析：现代数学认为这两种观点都不全面，解析几何定义两条曲线在交点处的夹角为两切线之间的夹角，因此“牛头角”是0°角，但这是一种非常义角。另一方面“牛头角”的度量问题，实际上与曲线在一点处的弯曲程度有关，这将由微分几何的曲线论中的曲率概念来反映。

这场争论反映了当时曲与直的矛盾。



毕达哥拉斯

(三) 无理数的发现与第一次数学危机

在公元前6世纪，古希腊有个著名的学派叫毕达哥拉斯(Pythagoras,约公元前550年)学派，该派家法严明，它兴旺的时期为公元前500年左右。在那一时期，毕达哥拉斯的思想是绝对权威的真理，他们认为“万物皆数”，这里的数是指整数，他们的信条是：宇宙间的一切现象都能归结为整数或整数之比，即世界上只存在着整数和分数，除此以外，没有别的什么数了。

后来该学派发现了一个定理即毕达哥拉斯定理，事实上应叫做勾股定理(商高定理)，$a^2+b^2=c^2$ (图2.2)，他们觉得这是件了不起的大事，并宰了一百头牛来庆祝。

但是不久毕达哥拉斯的一个学生希伯斯(Hippasus)约在公元前400年发现边长为1的正方形，它的对角线 l 与边长1之比 l (图2.3)，不能用整数也不能用整数之比来表达。(即$\sqrt{2}$为无理数的证明法) 这在当时就导致了矛盾。

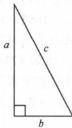


图2.2

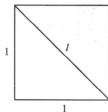


图2.3

这一发现否定了毕达哥拉斯派的信条，动摇了该派的基础。毕达哥拉斯非常恐慌，他下令严密封锁希伯斯的发现，如果有人胆敢泄露就处以极刑——活埋。

真理是封锁不住的，尽管毕达哥拉斯这样专制，这一发现还是被许多人知道了，毕达哥拉斯就下令追查泄密之人。追查的结果，发现第一个泄密者正是希伯

斯自己。

这还了得，希伯斯竟背叛老师，背叛自己的学派，他们要活埋希伯斯，希伯斯听到风声就跑掉了。于是毕达哥拉斯的忠实门徒到处追捕他。据说，他们在地中海上一艘船上找到了他，他们残忍地将希伯斯扔进了地中海里。

当时的人们觉得整数与分数是容易理解的，与古希腊的数学观点一致，就称它们为“有理数”，而希伯斯发现的这种新数影响了整数的尊崇地位，又不好理解，但又是存在的，就取名为“无理数”。这是历史的误会，国外的许多教科书上已把它们更名为“比数”与“非比数”，我们也认为这样较合适，但有人认为没有这个必要，应该保留历史的痕迹。

在数学史上，不可通约性的发现曾引起了第一次数学危机。这次危机使人们感到几何应占有特殊地位，直觉和经验不一定靠得住，而推理证明才是可靠的。因此，为了消除矛盾，解决危机，自然产物——古典逻辑与欧氏几何学就应运而生。

古代的人们对于存在，常常自觉不自觉的用了这样一个公式：不合理 = 不可理解 = 不可能 = 不存在。不仅上述的无理数，还有虚数、负数、无穷小、无穷远点(虚元素)等引进都曾使他们陷入迷茫的“太虚幻境”。

(四) 产生第二次数学危机的几个怪论

1. 从虚无到创造万有

现在的微积分可谓至善至美，可在牛顿和莱布尼茨创立微积分学的初期，由于当时微积分学的理论基础非常薄弱，常常有不能自圆其说的情况。因此，它遭到了当时不少人的猛烈抨击，如贝克莱、尼文太等，尤其是贝克莱(Gearge Berkeley, 1685～1753)大主教，他精通数学，为了维护宗教利益，他挑出了当时牛顿、莱布尼茨理论中一些不严格的地方大肆攻击，比如 1734 年他写了正题叫《分析学者》副标题叫“致不信神的数学家”一书。书中他批评到：牛顿在求瞬时速度的过程中，首先用 $\Delta S = t^2$，在 $t = 2$ 时的 V_2。


牛顿

$\Delta S = (2+\Delta t)^2 - 2^2 = 4\Delta t + (\Delta t)^2$，$V_2 = \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{4\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = 4 + \Delta t$，这时牛顿令 $\Delta t = 0$，并认为 $V_2 = 4$。这样的推导是很成问题的，因为在数学上总是非零数作除数，所以作为除数的 Δt 不能等于零；可是牛顿最后又采取割尾巴的方法，又令 $\Delta t = 0$。这样 Δt 一会儿是零，一会儿又不是零，这不是自相矛盾吗？Δt 既然代表时间它应该是一个数量。这个忽儿是零，忽儿又不是零，虚无缥渺、漂泊不定的数量 Δt，不正是我们教会里所说的鬼魂吗？不过它不是消失了肉体的人的鬼魂，


贝克莱

而是消失了数量的鬼魂，并指出这是“依靠双重的错误得到了虽然不科学却是正确的结果”，“每门科学，人们是用原理证明结论，而不是用结论来证明原理”。

大主教贝克莱对牛顿的攻击，完全是为了维护教会的神权统治，什么“量的鬼魂”纯粹是一派胡言乱语。但是，贝克莱却提出了一个值得重视的问题：Δt 到底是不是零？

对于这个问题马克思曾经作过研究(可参见他的《数学手稿》),我们现在知道 Δt 即 dt 是一个无穷小量，它不是一个具体的数，只是一个以零为极限的变量。马克思得出与此相吻合的结论：无穷小量实质上不过是变量(无穷小量)在矛盾运动中的“是零”与“非零”的对立统一关系，而微分是“扬弃了的差”，它可概括为否定之否定的过程。(既表明状态,又表明过程)，这就给微积分的进一步发展提供了哲学依据。

其实这个问题的彻底解决是在极限论建立之后。

在这一时期还有一个叫格兰弟(Grandi)的意大利修道士(僧侣)，他是比萨大学哲学和数学教授，以关于玫瑰线的研究而著名。他就级数的收敛、发散含混不清的情况，提出了一个怪论叫做“从虚无创造万有”来攻击微积分学中的无穷级数。他举出一个无穷级数 $x=1-1+1-1+\cdots$求和的例子。

因为 $a\cdot x=1-1+1-1+1\cdots=(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+\cdots=0,$

所以 $x=0$

$$b\cdot x=1-1+1-1+1\cdots=1-(1-1)-(1-1)+\cdots=0+0+\cdots=1,$$

所以 $x=1$

$$c\cdot x=1-1+1-1+1\cdots=1-(1-1+1+\cdots)=1-x\rightarrow 2x=1,$$

所以 $x=\dfrac{1}{2}$


阿贝尔

综上立得：$0=\dfrac{1}{2}=1$，在等式的两端乘上任何数，就得到 $0=$任何数，这时格兰弟说“从虚无(0)创造万有(任何数)”。

其实，由数学分析中的级数重排理论(即无穷和式先后次序不满的加法交换律)，可以重排的级数至少得收敛(条件收敛或绝对收敛)。可是上述级数通项趋向 0，故不收敛。所以大前提根本不满足。

注：学过实变函数论或者了解级数的进一步发展的人，是知道微积分里的级数求和法是属于柯西(Cauchy)，它是以部分和的极限作为无穷级数的和，若 L 是 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 的柯西和，便记作 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=L\ (c)$；


柯西

其实利用阿贝尔(Abel)定理可推广柯西求和法：设有无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$，如果 $\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n=L$ 存在且有限，则称为 L 为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 的阿贝尔和，记 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=L(A)$（可以证明：如果 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=L(C)$ 则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=L(A)$）。但有一些无穷级数，它的柯西和不存在，但它的阿贝尔和却存在。例如，$1-1+1-1\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$ 按柯西意义下的和不存在，而按阿贝尔意义其和存在且为 $\frac{1}{2}$。它的实际意义何在？这里倒是有一个有趣的解释：

一个父亲在临终前将一块宝石传给他的两个儿子，他规定两个人轮流保存这块宝石，这样就比较公平。我们假定每个儿子都是长生不老的，每人保存期为一年，这样对每一个儿子来说，一得一失，依此往返，得就是 $+1$，失就是 -1，用级数来表示为：$1-1+1-1+1\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$，由阿贝尔和知为 $\frac{1}{2}$，这恰是每一个儿子对于这块宝石的所有权。

上述举的两个例子都反映了有限与无限、零与非零的矛盾，它们说明了微积分学的不严格，是第二次数学危机的主要导火线。

《红楼梦》中有幅对联叫“假做真时真亦假，无为有处有还无”，数学史上就有这样的怪论。

2. 芝诺疑难



芝诺

大约公元前 450 年左右古希腊有个大诡辩家叫芝诺(Zeno)，他是当时巴门尼德(哲学家)的学生、爱利亚学派的主要人物。此人能言善辩(有诗为证:“大哉芝诺,鼓舌如簧;不论你说什么,他总认为荒唐。”)，曾经提出过四大疑难即四个怪论，它们不论在数学史上还是在哲学史上、逻辑史上皆有过重要的贡献，它们也是第二次数学危机的导火线之一，所引起的地震至今余波未息。这里举出三个：

(1) 二分法疑难



“运动是不存在的”。比如说物体从 A 移动到 B，按常理，从 A 到达 B 之前需先到达 AB 之中点 C，而要到达 C 点之前又必须到达 AC 中点 D，…如此下去，显然有无穷多这样的中间点。第一，每找一个中间点都需要时间，故对无穷

多个中间点需时间也是无穷，即永远找不着距 A 最近的一个中间点，亦即这点不存在。第二，物体欲从 A 到 B，又非经过这个最近的中间点不可。结论是物体运动是不可能的。

而常识告诉我们物体是运动的。矛盾！

无独有偶，在我国战国时期，也有一位精于辩论的人物，叫惠施，他很有学问，传说他写的书要装好几大车，他有句名言“一尺之棰，日取其半，万世不竭”。方式类同。

这个怪论用极限解释是简单的，即设 $AB=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$，所以 A 点最近的中间点就是自身，因此超越自己就运动了。

(2) 阿其里斯悖论



这是芝诺一个最著名的诡辩，采用通俗的方式叙述：假设乌龟和阿其里斯赛跑，(阿其里斯是希腊神话中的神行太保)只要乌龟的起跑点领先一段距离，芝诺说阿其里斯永远也追不上乌龟。比方说：人的速度是龟的 10 倍，即 $V_{阿}=10V_{龟}$，又设龟在人前面 100 米处起跑，他们同时开跑，当阿跑了 100 米，到达龟的出发点时，龟已向前爬了 10 米，阿再追 10 米，龟又爬了 1 米，阿又追了 1 米，这时龟又爬了 0.1 米，…这样如此下去，以至无穷，它们永远相隔一小段距离，换言之，阿总在龟之后，即永远也追不上乌龟。

这反映了连续与离散的矛盾！

事实上，设 $V_{阿}=10$ 米/秒，$V_{龟}=1$ 米/秒，$AB=100$ 米，这时，由 $S=Vt$，得 $t=S/V$

所以 $t_{总(人)}=100/10+10/10+1/10+0.1/10+\cdots=10+1+0.1+0.01+\cdots=11.111\cdots$(由无穷级数理论得到)

即人(阿其里斯)在 11.111…秒时追上乌龟。

(3) 飞矢疑难

“飞矢不动”，理由是飞矢在任何一个时刻只能占据空间的一个特定的位置，即在这一瞬间它就静止在这个位置上，所以飞矢的所谓运动，只是许多静止的总和，故而飞矢不可能动。

其实，物体在某一时刻运动与否？现在我们知道决定于它的瞬时速度，而与所在的位置无本质关系。

芝诺的三个诡辩论都反映了连续与离散、无穷小与很小很小等矛盾。

3. 分析

贝克莱、格兰弟、芝诺等的怪论以及非欧几何的真理性问题导致了第二次数

学危机。

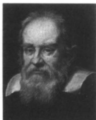
人们感到18世纪的数学思想的确是不严密的、直观的、强调形式的计算而不管基础的可靠，特别是微积分学基础问题，当时无穷小、无穷大、级数求和、符号使用等都很混乱。

在一大批数学家的努力下，极限的 $\varepsilon-\delta$ 方法、实数理论的建立，康托尔集合论的创立，使第二次危机基本得到解决。

但是无论是微积分学还是非欧几何的真理性，都被归结于实数理论的无矛盾性问题。这是第二次危机遗留下的一个尾巴。

（五）伽利略悖论

每个人都知道“整体大于部分”这个事实。两千多年前，欧几里得在构筑几何大厦时，就把这个公认的事实作为不可怀疑的公理。



伽利略

伽利略在1638年提出“部分有时可以等于整体”的悖论。为了弄清他这个悖论的意义，首先谈谈在数学上两个集合元素个数的相等，多、少的含义。

简单地说，在数学上两个集合元素个数相等意指它们之间能建立一一对应关系。这显然比我们传统的相等(只对集合元素个数为有限的情形适用)更有意义。比如电影院的座位个数与前来看电影的观众的人数，谁多谁少还是相等？方法有两个，第一法，假定只有一个入口，检票只需按1，2，3，…一个个的数一数，最后的结果与座位总数作一比较即可；第二法，假定电影院里每个座位只能坐一个人且每个人也只能坐一个座位，这时，你只要站在电影院里观察一下有几个空位子，或是有没有人站着即可！

众所周知：1，4，9，16，…，n^2，…是自然数全体的一部分，或者说平方数的个数比自然数的个数要少些，一般人认为这是真理。首先对这一事实怀疑的是牛顿的先驱者伽利略，他利用上述关于数学上的“相等”这种在当时是一种新方法的方法，发现自然数的集合1，2，3，4…与其平方数之集 1^2，2^2，3^2，…可以建立一一对应关系，即

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & \cdots, & n, \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1, & 2^2, & 3^2, & \cdots, & n^2, \cdots \end{array}$$

因此从个数上来说它们应当相等，这显然是一个矛盾。

事实上，这条古老的公理“整体大于部分”是从事物的有限数量上总结出来的，而且仅适用于有限量，因此当被研究的对象是无限领域内的，这条公理就失

灵了。

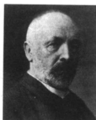
这个悖论深刻地反映了有限和无限的矛盾，似非而是，它提醒了人们不要随意地把任何“有限”的公理、定理、理论直接搬到“无限”上来。

值得一提的是后来的数学家如德国的戴德金正是用此来定义无限集(定义：凡是一个集合能同它的一个部分互相等价即相等时，那么这个集合叫做无穷集合。它的个数称为序数或基数)。如果你学过实变函数论就会对“无限”有更深的了解。

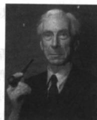
(六) 罗素悖论与第三次数学危机

1874年，数学家格奥尔格·康托尔(1845～1918)创立了一门崭新的数学分支——集合论，它可以算是最基础的数学学科。说得大一点，它不仅是一切数学的基础，而且还是其他科学的基础。

在1900年，当以康托尔集合论为基础的数学大厦已建立起来的时候，在巴黎召开的国际数学家大会上，法国大数学家庞加莱兴奋的宣布：“我们可以说，现在数学已经达到了绝对的严格。”在当时，并不是所有的数学家都相信这一点，有一位英国的哲学家叫贝特兰·罗素很怀疑这种严密性，他苦思冥想了三年，终于找到了一个证明自己观点的简单明确的表达式——罗素悖论。


康托尔

为了使它容易理解，先介绍康托尔关于集合的定义，他说所谓集合就是人们在直觉或思想中加以综合、概括的某些个体所构成的整体。简单地说，集就是“乌合之众”，不考虑是怎样“乌合”起来的。“众”可以具体，可以抽象；即具某性质的一组事物的总体抽象地称为集合；这里对集合中的元素并没有任何限制，虽然一个元素要判断它是否属于某一集，有时是不容易的。如有理数集 **Q**，若判断欧拉常数 **C** $\left(即\ \mathbf{C}=1+\frac{1}{2}\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ 是否属于它，甚至于在目前情况下还无法回答，然而一元素要么属于某集，要么不属于它，这可是绝对不模糊的。


罗素

罗素悖论也称为罗素——策墨罗悖论，因为策墨罗也曾同时独立的发现了它。它的叙述如下：

集合可分为两种：一种是本身分子集(自谓的)，比如“一切集合的组成的集合”也是一个集合，所以它必为该集合自身的一个元素，所以是一个本身分子集。

第二种是非本身分子集比如自然数集决不是某个自然数，即非自谓的。

这样一来任给一集，它不是本身分子集就是非本身分子集，二者必居其一。

现在设$\sum$是一切非本身分子集之集，试问$\sum$是哪一种集合？

因为$\sum$是康托尔意义下的集合，于是关于这个问题的回答便使我们左右为难了。

［分析］ 假设$\sum$是一个本身分子集，则$\sum$为自身的一个元素，而$\sum$中每个元素皆为非本身分子集，故$\sum$亦为一个非本身分子集。矛盾！

假设$\sum$是一个非本身分子集，则由$\sum$的定义知$\sum \in \sum$，故这恰符合本身分子集的定义，所以$\sum$又是一本身分子集。又矛盾！

总之，这与$\sum$应该二者必居其一矛盾！

为了使它更通俗易懂罗素本人在 1919 年将其改写为“塞维尔村的理发师悖论”，以下严格地用日常用语叙述：

塞维尔村的所有有刮胡子习惯的人可分为两类：一类是自己给自己刮胡子的，另一类则是自己不给自己刮胡子的。

现在村上有一个有刮胡子习惯的理发师自己约定：“给且只给村子里自己不给自己刮胡子的人刮胡子。”

试问，这个理发师的胡子将由谁来刮？

［分析］ 如果他自己给自己刮胡子即他就属于自己给自己刮胡子的一类，按约定他又不应该给自己刮胡子，因知他是一个自己不给自己刮胡子的人。

另一方面，如果他是属于自己不给自己刮胡子的一类，即自己不给自己刮胡子，可按他自己的约定，他又必须自己给自己刮胡子，所以他又是属于自己给自己刮胡子的一类。

这两类人是不同的，用数学语言说他们的交集是空集，按上述推理现在这个理发师又要给自己刮胡子，又不能给自己刮，对他自己来说是左右为难；而对集合定义来说是自相矛盾！

这个悖论以其意义简单明确揭开了当时的数学基础康托尔集合论本身的矛盾重重的盖子，震惊了整个数学界。数学家弗雷格刚要出版《算术的基本法则》第二卷时，收到罗素的信，他只得把自己为难的心情写在第二卷的末尾：“一位科学家不会碰到比这更难堪的事情了，即在工作完成之时，它的基础垮掉了。当本书等待付印的时候，罗素先生的一封信把我置于这种境地。”连大数学家庞加莱后来也不得不改口说：“我们设置栅栏，把羊群围住，免受狼的侵袭，但是很可能在围栅栏时就已经有一条狼被围在其中了。”可以这么说它引起了数学王国的一场大地震，动摇了整个数学的基础，使号称“天衣无缝”、“绝对正确”的数学陷入了自己自相矛盾的危机。

其实在罗素之前不久，康托尔和布拉里·福蒂已经发现集合论中的矛盾，他

们先后提出了布拉里·福蒂悖论、最大基数悖论，但都没有受到足够的重视。而在罗素的悖论发表之后，又发现了一系列语义悖论以及选择公理的承认与否，1924 年波兰数学家巴拿赫提出的分球奇论等，因此这时第三次数学危机不仅产生而且还在发展。

从罗素悖论提出之日起一直到今天许多数学家都试图解决悖论，罗素本人提出了类型论，后来又提出了三种即曲折理论、限制大小的理论、非类理论以后又提出分支理论，它们虽然可以消除悖论，但缺点很多，非常烦琐。

策墨罗则采用把集合论公理化的方法来消除悖论，后来演变为 ZF 或 ZFS 系统。冯·诺伊曼开辟的公理化集合论的第二个公理系统(NBG 系统)也克服了悖论，但是仍然存在许多问题。

再加上哥德尔、科恩等人的努力，到 1983 年建立了公理化集合论，即要求集合必须满足 ZFC 公理系统中十条公理的限制，此外也使数理逻辑取得了很大发展，证明论、模型论、递归论也相继诞生，出现了数学基础理论、类型论、多值逻辑等。

A. 塔尔斯基在理论语义学中，发现了许多语义悖论与逻辑悖论的相类似之处，于是逻辑学、语义学的发展也都与悖论分析相关。

(七) 秃子悖论

我们知道判断一个人是不是“秃头”，可以根据头发的根数 n，人为规定一个界限：如指定一个自然数 n_0，当 $n \leqslant n_0$ 就叫做秃头，当 $n > n_0$ 时就不叫秃头。好像只要这个界限 n_0 规定得足够合理，划分不就确定了吗？然而，何谓“足够合理”？就秃头问题来说，任何 n_0 都应该被宣判为不合理。显然张三正好有 n_0 根头发，李四正好有 n_0+1 根头发，仅一根之差，便分楚汉，这难道合理吗？

于是约定：若有 n_0 根头发的人秃，则有 n_0+1 根头发的人亦秃，这时就会导致“秃头悖论”：一切人都是秃头。

[分析]　任取一个人，设 n 表示他的头发根数，下面对 n 应用数学归纳法：

1) $n=0$ 时，这个人显然是秃头；

2) 假定有 n_0 根头发时这人是秃头，由约定立知：头发只比 n_0 多一根之人也必然是秃头。

故由数学归纳法知对一切 $n \in \mathbf{N}$ 均成立命题。亦即世界上所有人都是秃头。

注：如果将约定改为：“若有 n_0 根头发者不秃，则有 n_0-1 根头发者也不秃”。可以得出“光头不是秃头”的结论。

这个怪论反映了精确与模糊之间的矛盾，对于模糊的事物比如秃与不秃，绝对的界限是没有的，虽然在微小的量变之中已经蕴含着质的差别，然而这种差别是绝对不能仅用“是”与“非”这两个字来刻画。因此，数学归纳法这种只适用精确数学的方法不能直接搬进模糊现象中来用。

这个悖论对于模糊数学的产生是有过作用的。

（八）皮亚诺曲线

1890 年，意大利数学家皮亚诺(G. Peano, 1858～1932)发现了一条令人难以置信的奇怪曲线，他适当选择连续函数 $\varphi(t)$，$\psi(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$，由 $\begin{cases} X=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 所确定的曲线可填满整个单位正方形，这便是著名的皮亚诺曲线。它不像欧几里得所描述的简单曲线那样“有长无宽”或存在“曲面的边界”。



皮亚诺

问题是曲线应是一维的，正方形区域又是二维的，那皮亚诺曲线的维数到底是多少?

又如海岸线也是类似的曲线，这些复杂图形也具有自相似性称为分形。

对于分形，欧氏空间的维数(整数)已不足以描述它，而用 $D_0=\dfrac{\ln N}{\ln l}$ 来描述它的维数，l 作为独立方向扩大的倍数，N 为图形扩大的倍数，显然分形维数不一定是整数，可以是分数，进一步的研究引出了分形几何乃至分形理论。

二、略谈数学怪论

上面我们举出了不少的奇谈怪论，它们是数学发展的一种内在动力，也是矛盾斗争的产物，实际上在其他学科中也有类似的怪论，如语义学中的语义悖论、物理学中的光速悖论、引力佯谬、光度佯谬、时钟佯谬、猫的悖论、双生子佯谬、玻尔兹曼佯谬、现代系统论中的整体性悖论，等等。

悖论可以分为两类：逻辑悖论和语义学悖论。

细分起来悖论应有三种意义：

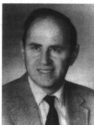
$$
悖论\begin{cases} 常义悖论 \\ 狭义悖论 \\ 广义悖论 \end{cases}
$$

狭义悖论是指一种导致逻辑矛盾的命题，这种命题如果承认它是真的，那么

它是假的；如果承认它是假的，那么它又是真的。比如：罗素悖论。

常义悖论是指某命题能使一个形式系统成为不协调者，比如：伽利略悖论、非欧几何、无穷集合论、勒贝格积分等，当然它还包括狭义悖论。

而广义悖论不仅包括常义悖论，还包括似是而非的怪论，比如：芝诺悖论、负数比无穷还要大、秃头悖论、从虚无创造万有等，也包括似非而是，如希伯斯悖论等。


科恩

数学怪论不仅曾引起了三次数学危机，也大大的推动了数学的发展，特别是数学工作者们对于常义悖论的分析与研究，值得指出的是 1931 年奥地利年轻的数学家哥德尔，首次发表了“哥德尔不完全性定理”，即对于任何一组公理，你都能做出既不能根据这些公理来证明事实确是如此，也不能根据这些公理来证明事实确非如此的说法。从这个意义上讲，任何人都不可能建立一组可以凭以推导出一个完美无缺的数学体系的公理。在 1963 年这方面的研究有了新的突破，是由 29 岁的美国数学家科恩做出的，他证明 ZF 公理与连续统假设，或选择公理都是彼此独立。事情到此并没有完结，矛盾伴随怪论还在不断的出现，因此我们必须清醒地看到数学大厦的基础上确实存在着裂缝，数学思维并不如想像的那样完美与和谐。这一方面现在还是一个“谜”——人类思维之谜，另一方面，我们期望着更深刻的矛盾、悖论呈现在我们面前，它或许会使我们从其“一孔之见”中窥得一束宇宙奥秘之光，使数学更加丰富、更加完美，从这一角度，数学家真是愿意：“让暴风雨来得更猛烈些吧！”

参 考 文 献

胡作玄．1985．第三次数学危机．成都：四川人民出版社
科学美国人编辑部．1982．从惊讶到思考——数学悖论奇景．李思一等译．北京：科学技术文献出版社
王树禾．2003．数学聊斋．北京：科学出版社

3　数学原子论——数与几何

今天的数学这棵参天大树，是从数与形这类最基本的东西里生长出来的，而且已远远超过了这些，长出各种千奇百怪的分枝与花朵，数与形经过抽象化、精确化、公理化以及不断推广，现代的数与形和它们原始的面目已相距十万八千里。数与形是整个数学的两大柱石，数学就是围绕着这两个概念的提炼、演变与发展而发展着的，数与几何本质上是数学的原子，应该说数与形的进化史恰为整个数学史的一个缩影。

一、数的进化史

(一) 数的四次扩张

大约在几万年以前，原始人最初产生的“数”的概念是“有”和“无”，这是人类最原始的数的概念。现代有不少探险家证实，在稍后的某些原始部族里，不存在比 3 大的数词，如果问他们当中的一个人有几个儿子，或杀死过多少敌人，只要这个数字大于 3，他就会回答说：“许多个。”考古学家们已发现人类历史上最早的数码字是在三千七八百年前埃及人的 1，2，3，4，5，…，8，9，10 和大约在 3400 年前我国殷朝遗留下来的甲骨文中的 13 个数码(相当于 1，2，…，10，100，1000，10000)。从广泛存在于世界上的历史古迹，众多的地下文物和大量的文字记载可以看出，五六千年前的尼罗河畔的古埃及，幼发拉底河和底格里斯河流域的苏美尔和巴比伦，印度河和恒河流域的古印度，以及黄河和长江之滨的中国是这世界文明的四个摇篮，也是数的起源地，继这之后大约在二三千年前左右的古希腊时代的人们已掌握了正整数(即自然数)，为了讨论方便记自然数全体为 $N=\{1, 2, 3, \cdots\}$，并掌握了它们之间的两种最简单的运算：加法与乘法。为了使加法的逆运算减法能进行，那时代的人们添加了 $\{0, -1, -2, \cdots\}$，即零与负整数，得到整数 $\mathbf{Z}=\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$，现实的需要为使乘法的逆运算除法能通行无阻的进行，这就又使人们考虑添加形如：$\left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbf{Z}, m, n \text{ 即约}, n \neq 1, n \neq 0\right\}$的新理想数，结果得到了有理数(或称比数)全体，记 $\mathbf{Q}=\left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\right\}$，在数学史上这次扩张被认为是数的第一次扩张，这在当时大约公元前 550 年左右，古希腊毕达哥拉斯学派就认为

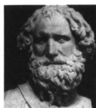
"万物皆数"，即"宇宙间的一切现象都归结为整数或整数之比"。但是在公元前400年前后该派的门徒希伯斯用毕达哥拉斯定理(即勾股定理)发现了以1为边的正方形的对角线的长不是一个有理数而是一个全新的数(即无理数称非比数)时，便引起了数的第二次扩张，它是在有理数集中添加全体无理数后得到的实数全体集**R**，$\mathbf{R}=\{\{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\} \mid r_i \in \mathbf{Q}, r_i=1, 2, \cdots; \{r_i\}收敛\}$。这以后虚数的出现是数学史上的一件大事，最初是在15世纪末期(1500年左右)，法国数学家舒开在解方程$4+x^2=3x$时得出$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-4}$，他提出此根不存在，这时他并未有研究。数学史上第一个认真讨论虚数的是文艺复兴时期3次方程解公式获得者之一意大利的数学家卡丹(1501～1576)，他在1545年提出了一个问题："把10分成两部分，使它们之乘积为40"。他解方程$x(10-x)=40$，整理求得根为$5+\sqrt{-15}$和$5-\sqrt{-15}$，他觉得奇怪，称$\sqrt{-15}$是"诡辩量"，并且自我解嘲地说："不管我的良心会受到多大的责备，但是的的确确$5+\sqrt{-15}$乘以$5-\sqrt{-15}$其积刚好是40！"细心的卡丹对此作了研究，得到了虚数的一些运算方法及性质。这以后许多数学家如笛卡儿、牛顿、莱布尼茨等都认为$\sqrt{-1}$是"虚幻之数"，可是它有用，笛卡儿便取名为"虚数"(1633年)，1777年瑞士大数学家欧拉提交彼得堡科学院论文中用$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$来表示虚数单位，后来高斯广泛地使用了i。事实上，数学家们为了使开方运算能通行无阻的进行，便从实数出发引入两个单位1，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，建立了包含全部实数在内的形如$\{a+b\mathrm{i} \mid a, b\in\mathbf{R}\}$的复数系，当然在复数系中也规定了运算，并且保持在实数系中成立的全部基本运算规律不变。这乃是数的第三次扩张。但这次扩张也放弃了实数的大小顺序关系，可是这是值得的，因为复数不仅能表示量的大小，还能表明方位，故它有极大的实用价值，如在物理学和工程学中的力，又如在电学中交流电，它的电流强度和方向都是不断变化的，这时没有复数就会寸步难行。大约到了19世纪初叶数学家们考虑能不能再进一步的扩充数系？确切地说，是不是可以把复数本身作为更广泛的数系的特款，而且这类数系也是从实数出发，但借助了两个以上不同的单位而建立起来的，且还能保持全部的基本运算规律呢？回答是否定的。即原则上不可能再进一步扩充数系并且使得算术的全部基本规律仍被保持。但是，如果舍去其中几条，那么数的第四次扩张是可能的，在数学史上出现了两种途径的第四次扩张，第一种扩张大约在1843年由仅次于牛顿的最伟大的英国数学家、物理学家哈密顿(R. Hamilton，1805～1865)提出的四元数，实四元数是指形如$\{a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k} \mid a, b, c, d\in\mathrm{R}, \mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=-1, \mathrm{ij}=\mathrm{k}, \mathrm{jk}=\mathrm{i}, \mathrm{ki}=\mathrm{j}, \mathrm{ji}=-\mathrm{k}, \mathrm{kj}=-\mathrm{i}, \mathrm{ik}=-\mathrm{j}\}$，其中加法就是分量相加，乘法如同多项式那样进行，但是，他也被迫作了两个让


哈密顿

步，其一是四元数包含四个分量，其二是牺牲了乘法交换律(如 ij = k≠ − k = ji)，这两个特点对代数学都是革命性的。哈密顿和牛顿一样，作为一个物理学家甚至比作为一个数学家更伟大，他在 14 岁时已经能读 8 种文字的书，18 岁时进了首都柏林的三一学院，是一个出色的学生，5 年后被任命为该院的天文教授，他笃信宗教，他的兴趣还包括玄学、数学、诗、物理学和一般文学，他还写诗，认为无限元素和虚元素都和诗类似。哈密顿是从 1828 年开始研究四元数的，寒来暑往，十几个春秋，难关未破，1843 年 10 月 16 日的黄昏他与夫人在都柏林的皇家运河岸畔的林荫道上漫步，清凉的晚风驱散了一天的疲劳，灵感降临了，正如 15 年后他所追忆的那样："当我们来到勃洛翰桥的时候，他们就来到了人间，或者说出生了，发育成熟了；这就是说，此时此地我感到思想的电路接通了，而从中落下的火花就是 i、j、k 之间的基本方程；恰恰就是我以后使用它们的那个样子。我当场抽出笔记本，将这些做了记录，同一时刻，我感到也许值得花上未来的至少 10 年(也许 15 年)的劳动。"这个具有历史意义的记录本至今仍在三一学院图书馆里珍藏着，据说，他当时情不自禁地掏出小刀，把四元数运算公式刻写在桥头的石碑上。1843 年 11 月，他在爱尔兰科学院宣布了"四元数"的发现，并为发展这个课题几乎付出了余生，他本人后来又给出了拟四元数，即在实四元数中规定 a、b、c、d 可取值于复数系。正当哈密顿建立其四元数时，数学家凯莱在 1845 年提出了八元数，而另一位德国数学家格拉斯曼(Grassmann, 1809～1877)正在建立复数的一个更大胆的推广，并在 1844 年提出了一种有 n 个分量的所谓超复数，即形如 $\{a = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n \mid a_n \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}\}$，并且规定了其加法即为分量相加，乘法有两种即内积、外积，这实际上与现在的 n 维向量空间中的向量是一致的。格本人在年轻时没有表现出数学才能，也没有受过大学的数学教育，但后来却成了德国斯德丁城的中学数学教师，实际上他在哈密顿之前就有了这个想法，但直到 1844 年他才发表于《线性扩张论》中。第二种扩张是在 1960 年秋由美国数学家阿伯拉罕·鲁滨逊(Abraham Robinson, 1918～1974, 生于德国的犹太人, 1962 年去美国)在普林斯顿大学的一次报告中就指出：现在数理逻辑的概念和方法能为"无穷小"和"无穷大"作为理想数进入微积分提供合适的框架。1961 年他正式发表文章，题为《非标准分析》，他用数理逻辑的方法真就把无穷大、无穷小作为"数"添加到实数系中，从而使实数域 $\mathbf{R}$ 扩充到了超实数域 $\mathbf{R}^*$，它是由形如 $\{\gamma + \varepsilon \mid \gamma \in \mathbf{R},\ \varepsilon$ 为无穷小量$\}$ 和形如 $\{H \mid H$ 为正负无穷大量$\}$ 以及实数全体 $\mathbf{R}$ 所组成的。换言之，$\mathbf{R}^*$ 是由标准实数(即实数)和非标准实数组成的。将它们直接参与数的运算，不但能简化极限运算，简化初等定理的证明，而且对简化艰深结论的证明也同样有效。但是 $\mathbf{R}^*$ 也放弃了 $\mathbf{R}$ 的阿基米德性质，可是加了一条无


鲁滨逊

穷小量公理即："存在一个超实数是正无穷小量。"这时显然阿基米德公理不成立，因为如果 ε 是一个正无穷小量，则没有一个正整数 n，使 $n\varepsilon > \varepsilon$。我们知道实数域的几何模型是标准实直线，复数的几何模型为复平面上的点，四元数的几何模型相当于一个变换（对一个给定的空间向量绕空间中一给定的轴转动，并把它进行伸缩，这时需两个参数（角度）固定转轴，一个参数定转动角，另一个参数规定伸缩率，因而是四元数）。为了便于理解超实数域我们也介绍一个几何模型，从现代科学技术提供的资料来看，任何点都是有内部结构的，物质是无限可分的，从这种认识出发，可以自然地认为直线是由单子组成，而每个单子又是由无限多个粒子组成的，比如在1处的单子 $\mu(1) = \{y \mid y \in \mathbf{R}^*$，且 $y-1$ 为无穷小$\}$，这种多层次的直线称为超实直线。如果不借助于显微镜或望远镜我们只能看到超实直线的标准部分——即一条标准实直线，其上的每个标准实数恰为那些单子的核，在核的周围存在着无穷多个与它无限接近的粒子，当然它们是肉眼看不到的。



阿基米德

（二）数的本质

总的说来，以上数的四次扩张，其实是不断地添加理想数的过程，使人们不断地加深了对数的本质的了解，数学家很敏锐地感到数实际上是可以用来进行运算，并且能同客观事物相联系的一些记号，它们的全体以及运算合起来应是一种数学结构。从这一角度我们不妨把：向量、矩阵、张量、变换等和某种代数系统如：群、环、域、代数等中的元视为某种广义数。如果我们用近代法国布尔巴基学派的数学结构思想，可以将数的发展用图3.1的框图反映出来：

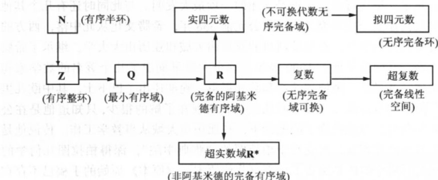


图3.1

为了揭露实数与复数的本质与内涵，数学家们用公理法对它进行了严格的定义，读者可在有关书上查到。

数发展到今天已演变成了各种抽象的代数系统与数学结构。它经历了四次重大的转折。数的发展也是代数发展的一个剪影。

二、几何的历史

相传几何学是在4000年以前发源于埃及。那时埃及的尼罗河两岸土地肥沃、农产丰富，因此埃及成了当时西方文化的发祥地。但是尼罗河每年有定期的泛滥，水涨时两岸田地被淹没，水退后，田地的界限被冲毁。为了解决土地的争执，测地学便随之产生。事实上，“几何学”一词的原意是由西方“测地学”音译过来的；此外埃及的金字塔的几何形体的精确与完美，以及传下来的关于金字塔的几何问题，人们不能不叹服。

古埃及尼罗河泛滥之后土地的重新测量所积累的不成系统的几何知识，是几何学的第一时期即公元前5世纪之前的成果。

几何学发展的第二时期即公元前7世纪到公元3世纪，这一时期几何学成为了数学的独立学科。它是由古埃及几何与古希腊的逻辑相结合的结果。

传说希腊的“七个聪明人”之一的泰勒斯到埃及去经商，很快他就掌握了埃及人已有的几何学知识，并把它们传回到希腊。从那以后几何学在希腊不但是一门时髦的学科，而且是一切学者的必修科。当时哲学家柏拉图便在门上写着：“不学几何学的人，请勿入此门。”希腊最大的书呆子是毕达哥拉斯，他是数学和音乐之父。他和他的朋友们组织了一个非常严密的集团叫毕达哥拉斯学派，他们常常秘密集会，讨论数学上的新发现，只有会员才让入内。他们的暗号是手心里的一个五角星，毕达哥拉斯定理是该派的一项最大发明。与此同时还有几个其他学派也对几何作了一些研究工作，到公元前338年，希腊文化从此中落，西方的文化中心又移回到埃及，在尼罗河口的亚历山大城和亚历山大大学，继承了希腊文化的正宗，并向前发展了1000多年。这个大学早期出了几个著名的数学家和物理学家如阿基米德、阿波罗纽斯和欧几里得，晚期还出了巴卜士，其中欧几里得对于几何学的贡献最大。关于欧几里得其人现在了解的很少，只知道他是在公元前300年左右，在托勒密王的邀请下，在亚历山大城从事教学工作。传说他是一位温良敦厚的教育家，曾受教于柏拉图的“雅典学院”，深得柏拉图几何学的真传；他为了教学的需要编成了一部《几何原本》，《原本》原始的手稿已不存在了，只有后来的一些修订本。《原本》一共15卷，从1482年到19世纪末，已用各种文字出了1000版以上，它的伟大意义在于它是用公理法建立起演绎数学体系的最早的成功典范。


欧几里得

关于《几何原本》我们以修订本希恩本为蓝本作一简介：

《原本》共13篇(后来有人又附加了两篇)，一共约467个命题。

第1篇一开始给出了23个定义，比如：①点是没有部分的那种东西，②线是没有宽度有长度，⑤面是只有长度和宽度的那种东西，㉓平行直线是这样的一些直线，它们在同一平面内，而且往两个方向无限延长后在两个方向上都不会相交。

紧接着欧几里得列出了5个公设和5个公理

公设：(只适用于几何的真理)

1）从任一点到任一点作直线 [是可能的]。

2）把有限直线不断循直线延长 [是可能的]。

3）以任一点为中心和任一距离 [为半径] 作一圆 [是可能的]。

4）所有直角彼此相等。

5）若一直线与两直线相交，且若同侧所交两内角之和小于两直角，则两直线无限延长后必相交于该侧的一点。

注：公设5是欧几里得自己搞的，能认识其需要足以显出他的天才。

公理：(适用于一切科学的真理)

1）跟同一件东西相等的一些东西，它们彼此也是相等的。

2）等量加等量，总量仍相等。

3）等量减等量，余量仍相等。

4）彼此重合的东西是相等的。

5）整体大于部分。

《原本》内容：1～4篇讲直线形与圆，第5篇讲比例论，第6篇讲相似形，第7、8、9篇讲数论，第10篇为不可公度量的分类。

第11、12、13篇讲立体几何及穷竭法。

《原本》中的原始公理体系标志着实质性公理学的诞生，它的功绩是不可磨灭的，但有许多不足之处，比如：堆砌之感，不确切与不严格之处甚多，含有一些不自觉的假定。尤其是第5公设引起诸多的争议，因为它不那么一望而知，有较复杂的性质和不自明性，从而它不像别的公设那样容易被人一下子接受，另一方面数学家发现欧几里得本人在《原本》中尽可能的避免应用这一公设，以至于应用的很迟而且内容冗长，读起来很别扭，于是人们怀疑它并猜测第5公设是否可能被其他公理、公设证明，或是简化(即用其等价公理取而代之)，换言之公设5似乎不是一个公设而是一个定理。据数学史记载从欧几里得时代开始的两千多年期间，几乎所有的数学家都做过证明第5公设的尝试，这是个有趣的猜想，被它吸引的人们都有这样的愿望，把它证明出来，以完成欧几里得的遗愿。但奇怪

的是，多少年来，尽管成千上万的人(其中包括许多著名的大数学家)在它上面付出了巨大的劳动，甚至贡献了他们毕生的精力，但没有一个人获得成功。

几何发展的第三时期。

在人们试证第5公设的漫长岁月里，特别到17世纪前半叶，产生了数学的全新的一个分支，叫做解析几何，在数学史上一系列最优秀的数学家的研究都已经接近了解析几何的观念，但是只有两位数学家特别清楚地认识到创立新的数学分支的可能性，其中之一是庇埃尔·费马(Pierrde Fermat, 1601～1665)(他出身于商人家庭,在法国都鲁斯学法律并以当律师谋生,他一度是该城的市议会的顾问,虽然数学只不过是他的业余爱好,且他只能利用闲暇来研究,但他对数论和微积分做出了第一流的贡献,也是解析几何两个发明者之一,并且同帕斯卡一起开创了概率论的研究工作,他还对光学做出了不朽的贡献,他具有伟大的直观天才,他的大多数工作都是通过写给朋友的信件闻名于世的。他只发表了很少几篇论文,但许多书和论文是在他死后经人整理刊印发表的。其中他的费马大猜想作为公认的难题闻名于世)，另一位是法国著名的哲学家惹耐·笛卡儿(Rene Descartes, 1596～1650)(他二十岁毕业于普瓦界大学,便去巴黎当律师,这期间约1年他与朋友们一起研究数学,从1617年以后他加入了军队,大约在1618年11月,他在荷兰的小城镇布莱达闲逛时,发现招贴牌上一张布告,当场一位荷兰的物理学、医学和数学教师别克曼告诉他,这是一张解数学题的有奖竞赛的布告。布告还明确公布了比物质奖励更富于象征意义的奖赏,即解答出来的人会获得城里最好的数学家的称号。就在第二天早晨,年轻的笛卡儿胆怯地去别克曼家,交给他问题的解答,没有一点差误,教授无比惊讶,因在这以前,没有一个人能这样轻易地、一下子解出公认的权威们用几个月的时间为之绞尽脑汁的问题。这件事使笛卡儿自信有数学才能,这以后他就经常思考数学问题,并解决过一些问题。当时他认为代数比较杂乱,不利于思想的艺术,又觉得几何过于依赖图形。他经常地甚至是终日地沉迷于代数与几何问题的思索。据他自己说,在1619年11月10日,他在德国的乌尔姆市时,一连做了三个奇异的梦,这天晚上他感到自己“发现了一种不可思议的科学的基础”,这三个梦向他显示了一切领域里建立真理的方法以及一门崭新的“绝妙”的科学,即解析几何。可以看出这个自述有些夸大其词,但实际上笛卡儿是花了大量的时间从3条思路(即哲学、自然、科学的用场)来研究的。1628年他移居荷兰,在那住了20年，写了不少哲学与数学、光学方面的书，1649年被邀请去瑞典做女皇的教师，1650年在那患肺炎逝世）。解析几何使平面上的曲线与有两个未


费马


笛卡儿

知数的代数方程之间建立了联系，它的基本思想在于要用代数来解决几何问题。由于这一发明，辩证法和运动进入了数学领域，紧接着又由于函数概念的采用，产生了微积分，由于解析几何与微积分的发展常常是交织在一起的，到了18世纪后期微分几何就变得更加重要了，微分几何是研究曲线和曲面上局部性质的。古典“微分几何”这个术语是在1894年第一次使用的。

由光学与绘画中的透视法所提出的一些问题，使许多数学家把它们当作欧氏几何的一部分来讨论，所得到方法和结果大大丰富了欧氏几何的内容，但它本身却是另一个新的几何分支的开端，这直到19世纪才被人们称为射影几何，这当中涌现出许多天才人物，如笛沙格(G. Desargues, 1591～1661)，帕斯卡(Blaise Pascal, 1623～1662)等等。射影几何有个很重要的原理叫对偶原理，它反映了射影几何中的命题是成双成对出现的，比如：帕斯卡定理与布列安香定理，但在历史上前者是于1640年发明的，而后者是在1806年发现的，相差160多年。

几何发展的第四个时期即近代几何时期，它的主要标志首先是非欧几何的诞生，我们知道为了证明平行公设，不知有多少人进行了千辛万苦的跋涉，尽管有些人宣告已经证明了它，可通过严格的分析原来在证明中，隐含了尚未证明公设五的等价命题作根据；总之都失败了，但是失败是成功之母，就在这一系列的失败中，有一些数学家看到了新的曙光，逐渐地走进了一个新的几何世界——非欧几何。在这段历史中，首先要提到的是高斯(Carl Friedrich Gauss, 1777～1855)，他是德国布伦斯维克城的瓦工之子，但后来却成为了“数学家之王”，“数学王子”，他在整个数学的各个领域都留下了足迹，甚至在物理学也是如此。关于平行公设的问题，他一生中从未出版过什么，只是在他死后，从他和一些数学家的通信以及他的遗稿中的一些记录才揭露出来，那就是作为一个卓越的数学家，高斯也曾竭尽精力，试图去证明平行公设，不过到后来，他逐渐认识到平行公设是不可能证明的。1817年，他在给奥尔柏斯的信上写道：“我日益相信几何中所需证明的部分是不能证明的，至少对于人类的智力来说是不能达到的。”以后，高斯的思想去转向发展一种新的几何。1824年，他在给托里努斯的信上说：“三角形的内角和小于180°，这假定引向一种特殊的、和我们的几何完全不相同的几何。这种几何是完全相容的，当我发展它的时候，结果完全令人满意。”但是，尽管高斯已经了解这种“新的几何”，即现在被称为非欧几何的实质，那么他为什么不发表他的研究成果呢：原因是他很怕别人不能理解他所思索的东西，他更怕别人因为不理解而讥笑他。1829年，他在给白塞耳的信中写道：“假如我不保守秘密的话，黄蜂会围绕他的耳朵飞的。”还写道：“如果我发表自己的全部意见，我害怕会引起波哀提亚人(即愚人)的叫喊。”高斯一辈子没有公开发表他的研究结果，


高斯

不仅如此，甚至在别人已经提这个问题时，他还不敢公开表示支持。高斯的顾虑是很清楚的，他是当时世界上数学界的最高权威，生怕由于别人不理解他的“新几何”而影响他的声誉。这正是伟人渺小的一面，在数学史上正是由于他在真理面前畏缩不前，使非欧几何这个数学上的重大发现的广泛传播推迟了20年。


约·波尔约

其次我们要提到的是一对父子，父亲是高斯的大学同学，一个匈牙利的教师俄·波尔约一辈子致力于平行公设的证明，但是没有获得成功。他的儿子约·波尔约1817～1822年在维也纳工学院读书时，就醉心于平行公设的证明，他后来是匈牙利军官。他和高斯一样逐渐认识到有可能去创造一种新的几何学，当他的父亲知道儿子在研究平行公设时，赶快写信去坚决制止。父亲的信是这样写的：“希望你再也不要做克服平行公设的尝试。即使你花了所有的时间在这上面，但是你一辈子也证不出这个命题。……我经过了无希望的黑夜，在这里面，我埋没了人生的一切亮光和一切快乐。上帝啊！希望你放弃这个问题，对它的害怕应该多于感情上的留恋。因为它会剥夺你生活中一切时间、健康、休息和幸福。这个无希望的黑夜能够使上千只牛顿之塔沉没，这个黑夜任何时候都不可能使大地上见到光明。”但是，父亲的劝阻并没有对儿子产生什么效果，小波尔约继续为发展新的几何而辛勤的工作，正当父亲感到绝望的时候，儿子却有了新的发现。1823年小波尔约满21岁的时候，他写信告诉父亲说：“我坚决地决定发表自己关于平行公设的工作，只要一旦情况允许我把资料整理好，我就这样做。现在我虽然还没有完全达到目的，但是我已经获得一些令人注目的结果；如果这些东西遭受摧残的话，那就太可惜了。当您看到这些结果的时候，您也会这样想的。我先说这么一点，我已经从乌有中创造了整个世界。”在经过一段艰苦的努力后，1832年小波尔约写了一篇26页的论文《关于一个与欧几里得的平行公设无关的空间的绝对真实性的学说》(或称为《绝对空间的科学》)作为其父的书《为好学青年的数学原理论著》的附录正式出版发表。小波尔约的著作是用拉丁文写的，因“附录”的拉丁文是“Appendix”以后人们就把这篇论文称作“阿乒的克斯”。这时老波尔约把儿子写的附录寄给他的老朋友高斯，征求高斯的意见。高斯很快就回了信，信里他一方面夸奖年轻的波尔约是“头等品质的天才”，并热烈地赞扬了这个年轻人的工作，可是另一方面，高斯在信上又说了这样一段话：“如果我一开始就说出我不愿意称赞你儿子的工作，那么你一定会感到惊讶。但是我不能说任何别的话，我要是称赞他就等于称赞我自己，因为他研究的内容，他所采用的方法以及他所达到的结果和我在三十至三十五年前已开始的一部分工作完全相同。我真是被这些结果所吓住了。

关于我自己的结果，虽然有一部分已经写好，但是我本来是一辈子不愿意发

表它们的。大多数人对于我们所讨论的问题都抱着不正确的态度，我发现只有少数几个人才对我给他们所谈的问题感兴趣。……我本来打算把它们统统写下来，免得它们和我一同被淹没。使我高兴的是现在可以免去这个劳动了，更使我高兴的是，替代我做这件工作的正是我老朋友的儿子。”

小波尔约对于这封赞许信感到非常失望，他没有想到别人会更早地达到同样的结果。他还认为，在这个发现上高斯在与他争优先权；另一方面，尽管高斯在私人信件中给了他很高的评价，却从来没有公开地表扬过他。小波伊的思想变得很沉重。当俄国的罗巴切夫斯基的书在1840年用德文发表的时候，他变得更加恼怒了。他因为没有获得任何人的理解、同情和精神上的支持而感到失望，心情沉重。这以后他抛弃了一切数学的研究，在孤独中渡过了自己的余生，1860年1月7日，这位才华横溢的数学才子结束了忧伤痛苦的一生。死后葬入无名公墓，在此公墓的记事本上登记说：“此人一生没有什么意义。”在这段埋没约·波尔约才华的事情中，我们应当公正地责备高斯，从那样的权威地位，无疑地可以粉碎一般人对平行公设的偏见，从而对小波尔约做出更有力的支持，可遗憾的是高斯并没有这样做。

再者应提到的是俄国数学家尼克拉·伊万诺维奇·罗巴切夫斯基(Nikolai Ivanovich Lobotchevsky, 1793～1856)，他生于一个俄国测量工作者的家庭，很早就死去了父亲，他母亲竭尽全力让儿子受到了完整的高等教育。他是在喀山大学学习，在1815～1817年间，他也曾尝试去证明平行公设，后来他认识到这样的证明原则上是不可能的，于是他断定存在一种新几何学。经过几年的研究他于1826年2月11日在喀山大学作了关于这种新几何的一个报告，对这个报告的会场情形有过这么一段描述“……大厅里的喧嚣声没有停止。几乎所有的听众都在说话。许多人的脸上浮现出一种当一个人发现他突然出乎意料地诱入罗网时所常有的那种表情。”


罗巴切夫斯基

罗巴切夫斯基竭力抑制住内心的激动，凝视着大厅，他想根据所听到的议论了解他的听众到底是哪儿不明白。莫非他的结论不是极其正确的？莫非他有什么地方违背了真理和理智吗？两千多年来，人们一直徒劳地试图找到欧几里得平行公设的证明。这个问题是向人类智慧提出的真正挑战，两千年来始终没有解决。而他解决了这个问题，他是通过保持欧氏几何除平行公设以外的全部公理、公设，而把平行公设改成一条内容截然不同的新公理——罗氏公理，并在这些公理基础之上建立了他的新几何学来解决的。难道我们有理由不接受一种象欧氏几何那样合理的，逻辑上无懈可击的新几何吗？

当时听这个报告的人们都听不懂，所以对他的报告，人们既不作批评，也不

写评论。同年2月23日这位青年教授宣读了他的论文“关于几何原理的推论”(1827～1846年他任喀山大学的教授和校长)，这篇论文于1829年正式发表在喀山大学学报上，在该文中他称新几何为“虚几何，泛几何”，“想像中的几何”，在以后他致力于宣传与普及罗氏几何的工作，但是当时的人们对他的新几何没什么兴趣，甚至还有一些自鸣得意的不学无术者对此进行了诽谤。这一诽谤是在彼得堡的杂志《祖国之子》上发表的。文章下面代替署名的只是“C·C”这两个字母，直到现在人们也不知道这个人是谁。下面就是这个“批评”中的一段：“怎么能够想到罗巴切夫斯基先生，这位数学长任教授为了什么重要的目的要写一本甚至不大能给最差学校的小学教员带来荣誉的书呢？假如没有学问，那么，没有学问，每一个教员至少还应当具有理智，而在新的几何里往往连这一点也很缺乏……”，1934年，有人还在《祖国之子》写文章讥讽说：“为什么不能把黑的想像成白的，把圆的想像成方的，把三角形内角和想像成小于两直角，把同一个定积分值想像成既等于$\frac{\pi}{4}$又等于∞？非常非常可能，尽管理智是不能理解到这些的。”“为什么不把标题《几何学原理》写成例如《对几何学的讽刺》、《几何学漫画》呢?”罗巴切夫斯基写了反驳文章，投《祖国之子》杂志，该杂志拒绝发表。德国著名诗人歌德还在诗中嘲笑这种几何，他写道：“有几何兮，名为非欧，自己嘲笑，莫名其妙。”罗巴切夫斯基在看到这些诽谤和讽刺时，气愤的心情可想而知，同行高斯对罗巴切夫斯基的成果心中有数，确认是正确和伟大的，他曾当着朋友的面私下表示赞许，说罗巴切夫斯基由于非欧几何学上的成就已成为全俄最为卓越的数学家，但高斯做了这一番表态后又悔又怕，请求他的朋友千万不要泄露他对罗巴切夫斯基的看法。高斯开始努力学习俄语，准备直接研读罗巴切夫斯基的原著，但在公开场合，高斯对罗巴切夫斯基一句好话也不说。在评选哥廷根皇家科学院通讯院士的会议上，高斯亲笔写了推荐通知书，同意罗巴切夫斯基当选，但对罗巴切夫斯基的非欧成就却只字不提。当时的罗巴切夫斯基是何等孤立，他克制住了自己，用毕生的精力来传播这一伟大发明，直到他晚年失明以后，他还以口授写出一部新几何的全新的说明，并于1855年以书名《泛几何》出版。罗巴切夫斯基在发现新几何之后30年直到他去世都未能看到对这种几何学的承认；1868年罗巴切夫斯基身后12年才被确认。


希尔伯特

尽管高斯、约·波尔约和罗巴切夫斯基等几乎同时分别独立地发现了这种新的几何，由于是第一个无所畏惧地大胆公开发表并宣传他的结果，所以今天人们还是把这种新几何称为“罗巴切夫斯基几何”，杰出的法国数学家丹立尔把罗巴切夫斯基比作发现新大陆的哥伦布。英国一些数学家称罗巴切夫斯基为“几何学中的哥白尼”，苏联人为了纪念19个世纪最伟大杰出的俄罗斯

数学家，于1896年9月1日，在喀山大学对面，树立起罗巴切夫斯基的纪念碑。

其实从几何公理学的发展来看，从试证平行公设到非欧几何的诞生是第二阶段，即从实质性公理学向形式公理学的过渡阶段。在近代几何时期第二个主要标志是形式公理学的形成，它的主要代表是德国大数学家希尔伯特与其著作《几何基础》[①]，第三个标志是1872年克莱因(1849～1925)发表的演说以后被称为“爱尔朗根纲领”[②]，第四个标志是拓扑学、大范围的微分几何、代数几何等等的形成与发展[③]。


克莱因

纵观整个几何的发展史，若问何为几何？几何是什么？过去的学习经验给我们的答案是：几何学是研究外部物质世界的空间关系的科学，它的内容就是分析空间的形式。在欧几里得看来，几何是由一组从公理引出的逻辑推论所组成。而在克莱因看来几何学是研究在变换群下图形的不变性与不变量的科学。对于“几何”这个词的含义，不同时期和不同的数学家都有不同的看法，尽管我们不能用简短的几句话来确切地回答，但是几何的过去、现在与未来才是几何的全部。

参 考 文 献

齐民友．1991．数学与文化．长沙：湖南教育出版社

王庚．1988．数的概念．中学数学教学，(6)：11～14

---

①②③在报告1、2、3、6中详细介绍。

4　近代中国数学史话

记得有首朝代歌曰：

夏、商、周，
春秋、战国、秦。
西汉、新，
公元界线平帝分，
东汉、三国、西东晋，
南、北朝，
隋、唐、五代、宋、辽、金，
元、明、清。
民国寿命短，
社会主义气象新。
以上约计四千二百春。

这也是中国数学的历史。


祖冲之

世界上数学史最长的国家是中国，自公元前2700年起到今日为止，已有4000多年的历史，恐怕只有印度或者还可以与中国媲美(印度有大约3500～4000年的数学史)，众所周知在世界数学史上传统的中国数学犹如一颗晶莹剔透的明珠，其中勾股定理、中国剩余定理、刘徽割圆术、杨辉三角形、祖冲之的密率和约率、秦九韶和朱世杰的天元术与四元术等，这些载誉世界的名篇，闪烁着五颜六色的东方智慧光芒。可以这么说，中国自秦至西汉中期这200年间，由于工农业生产和科学技术有了很大的进步，从而促进了当时的数学迅猛发展，一直到14世纪的宋元时期，传统数学在这时达到了它的最高峰，刘徽、祖冲之(家族)、贾宪、秦九韶、杨辉、朱世杰等都是这期间的代表人物，他们的主要成就诸如：算经十书(《九章算术》、《海岛算经》、《周髀算经》、《缀术》等)即小代数的主要内容等。此后的几百年间，由于封建制度的桎梏以及占统治地位的儒家思想严重地阻碍了科学发展，数学大为衰落，到了明末清初西方的传教士带来了欧洲的数学，中国的近代数学史话就从这开始了。

一、西方数学的传入


利玛窦

1582年，广东出现了一个金发碧眼的洋人，他态度谦和，四处结交达官绅士，学习中国语言文字，攻读经书，研习儒学，他就是意大利人利玛窦(Matteo Ricci, 1552～1610)，他曾在德国学习过数学，教过伽利略几何学，但是这次他并不是以数学家的身份来华，而是来华“传教”的耶稣会教士。他曾到过广东、南昌、上海、南京、北京，开始几年他并不为人所知。1596年9月22日在南昌他预测到了一次日食，这才使他名声大振，由于在中国的传教工作没有得到多大赏识，于是他给罗马教廷写了一份报告，写到打算时他写道：“现在只好用数学来争取中国的人心。”1600年他在南京与徐光启(1562～1633)相识，徐光启乃上海人氏，1591年中秀才；1596年徐陪赵家公子赴京应北闱乡试，结果自己倒中了顺天府第一名举人；1604年中进士入翰林院，自福建来京，向利玛窦学习科学知识，并协商翻译若干西方科学经典著作。1606年秋，由利玛窦口译，徐光启执笔，合译完欧几里得《几何原本》前6卷，1607年在北京雕版刊行，徐还仿照《几何原本》方法撰写了《勾股义》，根据利玛窦的一部草稿，编成《测量全义》，这是西方几何学、三角学、测量学首次在我国的传播。利玛窦于1610年卒于北京，虽然他怀着不良的企图以介绍西方数学为名打入我国统治集团内部，但他对我国近代数学的启蒙有重大影响。而徐光启不重功名利禄，毕生从事科学工作，他不仅在数学方面也在天文历法方面有很深的造诣，特别是在介绍西方科学成就时，注意结合中国的科学传统，这些使他成为中国近代科学的启蒙大师，1633年他死于北京。


徐光启


利玛窦与徐光启

1654年诞生了另一个值得一提的人物，清康熙皇帝玄烨，他颇注意西方数学，专门请传教士(如法国白晋(Joachim Bouvet, 1656～1730)、张诚(Jean-Fransois, 1654～1707)）入宫讲授数学，如今在故宫博物院中仍藏有当年张、白为康熙授课时所用的桌子。他不仅向西方传教士学数学，而且向中国数学家学习(如安徽宣城人氏梅文鼎一家几乎都与他讨论过数学)，在他的主持下，由梅瑴成(孙)等人编成一部初等数学百科全书《数理精蕴》，作为一个封建皇帝，能如此重视数学并孜孜不倦地学习数学，在古今中外历史上是绝无仅有的，尽管他提倡

学科学，并身体力行，毕竟只是个人行为，虽说康熙与牛顿、莱布尼茨是同时代人，可当时中国却无法了解微积分思想，当然这有多方面原因，事实上康熙一死，雍正便对此没有兴趣，乾隆皇帝只能舞文弄墨，至于以后的嘉庆、道光更是等而下之。

科学上的落后与政治上的昏庸总是共生的，1840 年，道光皇帝在鸦片战争中割地赔款。这以后清朝的有识之士纷纷寻找富国强兵的良策，他们一起启奏同治皇帝："水师之强弱，以炮船为宗；炮船之巧拙，以算学为本。"这样一来西方先进的数学，终于渐渐地在中国普及开来。值得一提的是李善兰(1811～1882，浙江海宁人)以及他与英国人伟烈亚力(Alexander Wylie，1815～1887)的合作，李善兰与伟烈亚力在 1852 年合作翻译完《几何原本》的后 9 卷，他们一个不懂外语，一个不通数学，译书时，先由伟烈亚力口述中文，经过李鉴别谬误，删芜正伪，然后成文，历时 4 年，到 1856 年完成，接着又于 1859 年合作译出［英］德·摩根的《代数学》以及《代微积拾级》(其中"代"为解析几何，"微"为微分，"积"为积分)。

二、清末民初的中日数学对比与思考

1859 年，李善兰与伟烈亚力合译的《代微积拾级》18 卷在上海墨海书局出版，其中首次出现函数、微分、积分等译名，这一时期的日本，仍以中国的数学著作为准绳，李所创的译名传至日本并被广为使用，以至现在中日两国数学名词诸多相同，如：微分、积分、方程、曲率、曲线等，总之 19 世纪中叶，日本仍向中国学习数学。

从 19 世纪末开始，日本数学渐渐超过中国，这与日本重视科学和教育有关，请看下列一段中日数学的对比。

中国的洋务运动(1860 年)和日本的明治维新(1868 年)都发生在 19 世纪 60 年代。在发展工业方面，1860 年，日本在长崎设立制铁所；1862 年，李鸿章办上海洋炮局；1862 年，日本石川岛造船厂生产出第一艘蒸汽军舰"千代田丸"；1865 年中国的江南造船厂的前身也在上海设立；1872 年日本有了横滨—新桥铁路；1876 年中国也有了上海—吴淞铁路，相距都不过三四年。但在科学教育措施方面，则相差甚远。请看下表：

日　本	中　国
1873 年学校普遍教授西算(不学和算)	1911 年(辛亥革命左右)普及西算
1877 年东京数学会成立	1935 年中国数学会成立

续表

日　本	中　国
1877 年东京大学成立，(数学系请了 3 个美国人任教，并于 1879 年送回)	1898 年设立京师大学堂 1912 年北京大学成立 1919 年才有数学系
1879 年帝国学士院成立	1928 年蔡元培成立国立中央研究院(北平研究院)
1896 年《大日本数学史》出版(远藤利贞著)	1919 年李俨《中国数学源流考略》出版
1911 年创办《东北数学杂志》	1935 年创办《中国数学学报》
1897 年开始设立博士学位	1983 年第一批博士才正式授予

从数学上看，中国曾派遣一个叫康宁的人去巴黎高等师范学校学习数学。据说，此人学习极好，思路敏捷，可惜回国后，没有得到很好的重视，在京汉铁路上找了一点事做，后来不幸被一个比利时人杀害。这是我们仅有的关于数学方面早期留学生的信息。而日本 1898 年派日本数学家高木贞治去德国的哥廷根大学向大数学家希尔伯特学习代数数论。这是日本数学进入世界数学主流的开始。高木回国后继续研究，创立了类域论，解决了希尔伯特第 9 问题，终于达到了世界第一流水平，这是 1920 年的事。高木的成功带动了整个日本数学水平的提高。



高木贞治

由于科学、教育上的落后，中、日两国的经济实力、国防力量之间的差距也越拉越大。甲午战争以后，中国反向日本派遣留学生，中国数学教育也开始学习日本了。



冯祖荀

1898 年冯祖荀去日本学数学，回来后带了一本《代数学》，但是就是这本 1905 年在京师大学堂使用的基础数学教材，印刷仍采用“中学为体、西学为用，祖宗家法不能改变”的办法，即“竖写”。例如，书中的例题：$\frac{\text{五}}{\text{丁}^{\text{二}}}\ \frac{\text{⊤}}{|}\ \frac{\text{三}}{\text{丙}^{\text{二}}}\ \frac{|}{\text{⊥}}\ \frac{\text{二七}}{\text{甲}^{\text{二}}\text{乙}^{\text{二}}}$，表示：$\frac{w^2}{5}-\frac{z^2}{3}+\frac{x^2y^2}{27}$。

1900 年，希尔伯特在国际数学家大会上发表关于 23 个问题的演说“数学问题”，展望 20 世纪数学的发展，而中国的现代数学尚未降生。1905 年，中国高等学府的数学仅相当于西方 17 世纪的水平，差距在 200 年以上，甚至就连这样的代数学和微积分课程中 a，b，c；x，y，z；1，2，3，…仍旧不用，课本仍保持竖排。封建传统对人们思想的束缚，由此可见一斑；从 1607 年徐光启与利玛窦译《几何原本》前 6 卷到 1856 年后 9 卷的翻

译整整过了两个半世纪。上述的这些历史惨状，不禁使人们感叹：如果徐光启的事业一直继承下来，中国数学会是什么样子呢？这是值得每一位中国数学工作者深思的。

三、中国现代数学的诞生与发展

19世纪中叶，西方商品的涌入给中国带来了西方的侵略和文明。隆隆的大炮声唤醒了一部分中国人，他们认识到要改变自己的落后，必须推翻满清皇朝和学习西方的科学技术。辛亥革命推翻了满清王朝，一批知识分子寻找中国富强之路。中国也开始向西方各国派了大批留学生，这些留学生回国后，努力普及现代数学知识，兴办数学教育，出版科技刊物，并开始创办科学学会和研究所。他们都成为中国现代数学的拓荒者与先驱者、领导者，比如：从美国留学归来的胡明复、姜立夫、秦元勋、钱宝琮等，从法国留学归来的熊庆来、何鲁、陈荩民、关肇直、陈省身等，从英国归来的许宝騄、徐利治等，从日本留学归来的陈建功、冯祖荀、苏步青等，东欧回来的王梓坤(苏)、侯振廷以及本土的数学家李俨、傅仲孙等。


胡明复

中国现代数学队伍的形成，与拜师学艺、名师出高徒、学生继承师业等师生关系的影响有极大关系，以下将从师生关系这一纽带谈一谈中国现代数学研究方面的“中国国家队”的形成，顺便简略的介绍所涉及数学家。


江泽涵

从美国归来的最早的要算胡明复(1891～1927)，他是第一个获得哈佛大学研究院授予的哲学博士学位的中国数学家。胡明复是无锡人氏，兄弟三人(胡敦复、胡明复、胡刚复)，被称为近代科学史上的“三胡”，他与赵元任、胡适等人于1910年秋去美国留学，他们成立了中国科学社，并于1915年1月发行了中国历史上第一本综合性的现代科学普及杂志《科学》。回国后，他一方面从事科学事业的组织工作，继续编纂《科学》杂志，并参与数学名词的审定工作，另一方面协助大哥创办大同大学，我国著名科学家严济慈就是他这一时期的学生。1927年6月12日，他回老家参加婶母的葬礼时游泳淹死。作为拓荒者值得一提的是姜立夫(1890～1978)先生，他是浙江平阳人，是1918年哈佛大学的博士，中央研究院数学研究所所长，也是南开大学理学院的奠基人之一，作为数学教育家，他培育了一批人才。他的学


姜立夫

生有刘晋年、江泽涵、申又枨、陈省身、孙本旺、吴大任等。江泽涵的学生有姜伯驹、石根华。

1949年上海解放前夕，姜被迫去台湾，那时在天津的吴大任写信给他劝他回国并附上吴的两个孩子给姜的两个孩子的一幅画，画面上是“一艘海轮正靠岸，轮船上有两个孩子，岸上也有两个孩子招手欢迎”。后来姜先个人、后家属都赶在广州解放前回到祖国，他夫人胡芷华、儿子姜伯驹也都擅长数学，1978年姜立夫因病逝世，终年88岁，南开大学还设立了姜立夫奖学金。


吴大任

较早从国外归来的还有熊庆来(1893.9～1969.2.3)，他被誉为中国现代数学的先驱，他的事迹以及他的弟子们的工作在中国现代数学史上占举足轻重的一席，他是云南人，曾在比利时、法国留学，以优异成绩获理科硕士学位，回国后创办了南京大学数学系，作为一个数学教育家可以说桃李满天下，他爱才惜才识才是知名的。我们大家熟知的许多数学家都是他的学生或者由他发现、提携的。


熊庆来

作为我国函数论的创始人熊庆来被誉为数学伯乐，他培养了严济慈、陈省身、吴大任、庄圻泰、杨宗磐、许宝騄、段学复、柯召、田方增、朱德祥、华罗庚等，他在晚年还培养了杨乐、张广厚，而许宝騄又培养了钟开莱、冷生明、王寿仁，此外还有林家翘、赵访熊等。

作为一个数学家，他3次出国(1913年首次出国，先学采矿，后转数学；1931年赴欧研究，在法国研究出了被欧洲的数学家誉为熊氏无穷级理论，他也因此被授予法国国家理科博士学位；1946年赴巴黎开会，于1957年6月回国)，从1957年到1964年他发表了近20篇高质量的论文，1969年2月3日逝世。

留法回国较早的还有何鲁(四川广安人，1894～1973，东南大学教授，他早年加入同盟会，是国民党元老，是“部聘教授”)、陈荩民(浙江天台人，1895～1981，是一位民主革命时期的风云人物)，他们所培养的弟子参见下表：

何鲁 → 吴有巡、钱三强、赵忠尧、吴新谋、吴文俊

陈荩民 → 樊映川

从日本取得博士归来的有两个人，他们是陈建功、苏步青，陈建功(1893～1970)是藤原松三郎最得意的学生，浙江绍兴人，他曾3次东渡日本，其主要工作在函数论方面，世界性的成果发表于1928年，课题是研究傅里叶级数的收敛和求和的问题，以及从理论上探索怎样可以将函数表达为三角级数。而苏步青是


陈建功

浙江平阳人(1902.9～2003.3.17)，出生在浙江省平阳县的一个山村里。他对数学的兴趣开始于初三。那年，他就读的浙江省六十中来了一位刚从东京留学归来的教数学课的杨老师。杨老师在课堂上讲过一句话："为了救亡图存，必须振兴科学；数学是科学的开路先锋，为了发展科学，必须学好数学。"从此他立下了"读书不忘救国，救国不忘读书"的座右铭。1919年去日本学习，1928年春他在一般曲面研究中发现了四次(三阶)锥面，用几何的构图刻画出曲面的高阶微分性质，在国际数学界引起很大反响，这一成果随即被人称为"苏锥面"。到1931年初，他已有41篇仿射微分几何和射影微分几何方面的研究论文发表在日本、美国、意大利等国的数学刊物上。1931年初获理学博士学位，他谢绝了日本东北帝国大学的聘请，和日本妻子一同返回祖国，与陈共同执教于浙大、复旦大学，作为中国微分几何学派的创始人，苏步青被国际上誉为"东方国度上灿烂的数学明星"、"东方第一几何学家"。20世纪四五十年代，苏步青开始研究一般空间微分几何学。60年代又研究高维空间共轭网理论，获得系统而深入的成果。70年代以后，他又注意把微分几何运用于工程中的几何外形设计，在中国开创了新的研究方向——计算几何。

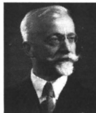

苏步青

而作为杰出的数学教育家，陈建功和苏步青也是严师出高徒的表率。陈建功的学生有程民德、徐瑞云(女)、夏道行、严绍宗等，苏步青一生可谓桃李满下，屈指随意一数：在全国闻名的十几所大学里，曾经有几十位数学系正、副主任是苏的学生，在全国数学学会里，曾经有十几个他的学生担任理事。他的学生有张素诚、白正国、吴祖基、熊全治、谷超豪、胡和生(女)、孙泽瀛、李大潜等，他们后来成为南方派。


维纳

值得一提的还有早年从日本归来的冯祖荀的得意门生傅仲孙(1892～1962)，江西高安人，著名的数学教育家，他的学生有数论专家闵嗣鹤、赵慈庚等。

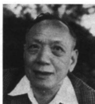
中国本土上培养出的两个大家，所谓北"李"南"钱"，李俨与钱宝琮都是中国古算史现代研究的奠基人，北方的李俨(1892～1963)，福建闽侯人；南方的钱宝琮(1892～1974)，浙江嘉兴人，浙大的教授，他的儿子钱克仁继承父业，现在苏州大学任教。这两位数学史专家使中国数学在世界范围内得以传播。


嘉当

应该说，抗战前夕的中国数学已有了相当的根底，在解析

数论、函数论、射影微分几何等方面已有了很好的成果。据说著名数学家维纳在1936年去挪威奥斯陆参加世界数学会议的轮船上曾对日本数学家说过："中国在数学上已赶上日本了。"这反映了当时的中国数学的确有很大进步，但这一时期的中国数学离世界数学的主流还有相当大的差距。

长江后浪推前浪，一代更比一代强，新从国外留学归来的华罗庚、陈省身、许宝𫘧等又给数学界带来了勃勃生机。



陈省身

陈省身(1911.10.26～)浙江嘉兴人，法国大数学家嘉当(E.Cartan)的学生，作为世界级的数学巨匠，他是华人数学家的杰出代表，成就为：高维高斯-邦内特公式内蕴证明和示性类两项极负盛名的工作。最重要的贡献是认识到嘉当的联络的几何思想与纤维丛理论有密切的关系，从而把微分几何推进到大范围的情形。这使他成为创立现代微分几何的大家，人们曾把他称为"当代还活着的最伟大的几何学家"，曾获得当代数学的最高奖之一——Wolf奖(以色列颁发的)。他现已退休，并极为关心祖国的数学教育事业，是南开大学数学研究所所长，协助国家制定了向美国选派留学生的"陈省身"项目，还设立了陈省身数学奖，作为杰出的数学教育家，他的学生出名的很多。在西南联大时的学生有王宪钟、严志达、吴光磊、杨振宁、钟开莱，在中央研究所时的学生有吴文俊、廖山涛、孙以丰、杨忠道、叶彦谦、曹锡华、路见可、朱德祥、张素诚等，在国外培养的学生有丘成桐、项武义、项武忠；叶彦谦的学生有王明淑、史松龄。其中丘成桐于1983年荣获当代数学的最高奖之一——菲尔茨奖，为华人增了光。



丘成桐

华罗庚(1910～1986.6.12)江苏金坛人，是一位自学成才的中国数坛巨星，他一生中曾两次遇到伯乐(即王维克、熊庆来)，这是很走运的。作为巨星，他的数学工作主要在四个方面：一是数论(40篇左右的论文与《堆垒素数论》)；二是代数(典型群、华氏定理、矩阵几何)；三是多复变函数论(《多个复变数典型域上的调和分析》)；四是推广双法("统筹法"以改善组织管理为目的,"优选法"以改进工艺为主)，作为杰出的数学教育家他在这四个方向上都培养、带动并影响了一大批人。



华罗庚

华罗庚在数论方面的学生有闵嗣鹤、陈景润、王元、潘承洞，代数方面的学生有万哲先、陆启铿、严士健、徐利治，多复变函数论方面的学生有龚昇、钟家庆，应用方面的有陈德泉、计雷。

华罗庚的研究工作横跨代数、几何与分析三大分支，硕果累累，在中国数坛上堪称独步，他所造就和影响的青年数学家也都有出色的工作。无怪乎国外数学家把华罗庚作为中国数学界的代表人物，美国数学家伯斯(Bers)说："华绝对是第一流的数学家，他是极有天赋的人。"华罗庚一人身兼数十项职务，还为青少年写了大量的数学普及读物。1986 年 6 月 12 日，当他正在日本做学术报告时，心脏病突发，当晚 10 时去世。



许宝騄

许宝騄在英国研究概率论和数理统计，解决了一系列的难题，成为 20 世纪数理统计学的奠基人之一。

以上 3 人的工作，都已在 20 世纪数学史上留下了印记。

解放以来尽管道路曲折，由于数学工作者们的努力，终于有了一支数学研究方面的"中国国家队"，而且他们中许多人都达到世界先进水平，但在大多数方向都处在落后的地位，很多方面相差甚远。

20 世纪 50 年代，在国内外工作的华人数学家共同努力，一些和国计民生有关的学科，如偏微分方程、概率论和随机过程、计算数学、信息论和控制论等都从无到有地建设起来。各大学数学系毕业生成几十倍地增长，数学教育得到空前普及。原子弹、氢弹、人造卫星的研制成功都有数学家的功劳。"文化大革命"期间数学研究和教学几乎停顿。陈景润在哥德巴赫猜想上的突破大大的鼓舞了中国数学界，1976 年以后，国家走上了新的发展轨道，数学研究打开了更新的局面，大批训练有素的年轻学子在世界各国的大学数学系、研究院留学和工作。今天当你随手打开任何一期的国际著名数学杂志，几乎都有中国数学家的论文。1986 年在美国伯克利举行的国际数学家大会上，吴文俊作了 45 分钟讲演。1990 年在日本京都举行的国际数学家大会上，大陆到美国工作的田刚、林芳华应邀作了 45 分钟报告。1994 年在苏黎世举行的国际数学家大会上，张恭庆、马志明和在美国工作的于骏、励建书都作了 45 分钟报告。2002 年 8 月 20 日至 28 日，第 22 届世界数学家大会在北京召开，世界数学精英、科学巨擘纷纷来华参会，盛况空前。这不仅开创了国际数学家大会在发展中国家举办的历史，更重要的是说明中国的数学研究与教育的国际地位已经得到了世界的认可。2002 年 8 月 20 号下午，应国际数学联盟主席帕里斯的邀请，中国国家主席江泽民为本届菲尔茨奖颁奖，将菲尔茨奖章颁发给两位获奖者。2002 年 8 月 20 号的中国北京人民大会堂第一次成为数学的圣殿。

美国哈佛大学教授、1983 年菲尔茨奖获得者丘成桐说："数学家大会在中国开，就像奥林匹克在中国开一样，假使真的在中国开的话，中国政府和一般的大学也会花很多时间去将数学的研究提升起来。2002 年国际数学家大会在北京举行，不仅标志着中国数学研究的巨大发展成就，更重要的是它给中国数学研究带



第 22 届世界数学家大会开幕式　人民大会堂

来了一个发展的契机。”

中国科学院院士田刚说：“自从改革开放，包括我自己从那个年代过来，中国的数学有了很大发展，尤其有了很多新的年轻的数学家，填补了很多研究领域的空白。但是我们中国数学离世界最先进的数学研究水平还有相当一段的距离，这主要是反映在我们还需要更多的开创性的工作，不仅仅需要文章，我们应该鼓励年轻人去做一些开创性的工作。”

可以这么说，当今数学研究的格局是：美俄继续领先，西欧紧随其后，日本正迎头赶上，中国还是个未知数。

陈省身在 1988 年 8 月南开的数学盛会上曾提出了“陈省身猜想”(即中国数学 21 世纪将率先赶上世界先进水平,成为数学大国)。他举例说：“浙江大学的林芳华同学已受聘于芝加哥大学的正教授，而普林斯顿大学 1983 年年轻的数学教师，一共聘了 6 位，有两位就是中国学生：一个是田刚(北大的)，一个是李天岩(系统所)；其实这些人都很有可能是未来的领军人物。”2001 年田刚已成为中国科学院新增院士，李天岩也已成为知名数学家。“陈省身猜想”正在被一一证明。

马克思曾经说过，任何科学只有在数学得以成功地应用其中时，才能被认为是完美的科学。在过去的一个世纪里，数学创造的高度抽象的语言结构和方法，被反复证明，数学是其他科技领域和社会生产实践中普遍适用的工具。数学对于现代文明和人类进步有着巨大的作用。

我们古老的民族迈着沉重的步伐缓缓地走到了今天。我们曾茹毛饮血，我们

曾钻木取火，我们曾战胜过无数灾难。

我们有着令世人瞩目的悠久而灿烂的文化和同样令世人瞩目的屈辱而悲壮的历史。

我们没有理由将一个落后于世界发展的中国移交给子孙。

我们的祖先在看着我们，我们的后代寄希望于我们。

历史和现实，先人和后辈都在向我们大声疾呼——出路，惟有数学率先赶上！

参考文献

张奠宙．2002．20世纪数学经纬．上海：华东师范大学出版社

张奠宙、王庚等．2001．现代数学家传略辞典．南京：江苏教育出版社

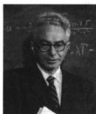
张奠宙．2000．中国近现代数学的发展．石家庄：河北科学技术出版社

张奠宙．1993．中国现代数学史略．南宁：广西教育出版社

中外数学简史编写组．1986．中国数学简史．济南：山东教育出版社

5 话说微积分

在任何一所大学里高等数学(微积分)都是一门重要的基础课，对于数学系的学生来说微积分更是一门重头课，这不仅是指它内容庞杂，涉及各方面，应用极其广泛，学习时间长到一至两年，而且还因为它是旧三高(高等分析、高等代数、高等几何)之一，正像相声有四门基本功课，即说、学、逗、唱一样，数学分析、解析几何、高等代数是数学工作者的基本功课，微积分也是任何一个学习数学的人必须闯过的第一个真正的大沙场；微积分——这部无限的交响乐是由全世界各民族的千千万万的数学工作者经历了2500年之久用自己的血、泪、汗、才智等谱写而成的，正如当代数学分析权威R. 柯朗所指出的，“微积分乃是一种撼人心灵的智力奋斗的结晶”。因此熟悉这一学科的历史发展，了解人类的这一巨大精神财富的积累过程和历代数学家艰苦卓绝的奋斗精神，对于陶冶一个人的数学思想情操，增长与提高自己的数学意识与思维能力，形成自己的数学世界观，对于自身的学习与工作都将具有重要的意义。


柯朗

现代微积分有时作为“数学分析”的同义语，一般来说数学分析包括微积分、级数论、函数论(实变、复变、实复分析)、微分方程、积分方程、变分法、泛函分析、非标准分析等，它们皆属于“分析类数学”，是整个数学三个基本部门之一(其余两个门类为:几何类数学、代数类数学)；在古典意义下，微积分是微分学和积分学的合称。下面将以此为主线，从它的过去、现在与未来展示这一波澜壮阔的史诗。

人们常说“牛顿和莱布尼茨发明了微积分”，其实这样概括人类思维的这一伟大成果的产生太简单了。

事实上，微积分的一些基本问题的提出和解决，其根源可以追溯到古希腊时代，由于16世纪至17世纪初的微积分的先驱工作，才使牛顿、莱布尼茨于17世纪后半叶正式发明微积分，并在18世纪里获得了蓬勃发展，当19世纪的数学家们为这一学科奠定了牢靠的逻辑基础时，古典微积分才基本完成，到了20世纪它又在两个不同的方向上有了新的发展。

一、微积分的萌芽（15 世纪以前）

（一）（公元前）东西方

1. 古代中国

战国时代的《庄子·天下篇》中，“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”潜含无限思想，“至大无外，谓之大一；至小无内，谓之小一。”这是惠施(约公元前370～公元前310)的一句话，提出了无穷大与无穷小。

此外当时的重要著作《墨经》中不仅对有穷与无穷作了明确的区分，而且也有丰富的微分思想。

2. 古希腊罗马

古希腊的原子论者德漠克利特就具有朴素的微分和积分思想。

圆是最美也是最重要的曲边形，古埃及人把它看成是神赐予的神圣图形，如何求圆的面积是数学对人类智慧的一次考验，也是极限诞生的种子。

大约在公元前 400 年古希腊人提出了三大几何难题，其中之一是“化圆为方”即指用圆规与无刻度的直尺求与已知圆等面积的正方形。



阿基米德

这一几何难题直到 19 世纪，才被人们证明它为尺规作图不能问题，既然化圆为方这条路走不通，人们不得不开动脑筋另觅他途，公元前 5 世纪的古希腊智者安提丰与布赖森分别用圆的内接正多边形以及外切正多边形的边数不断加倍的办法来接近圆的面积，他们认为圆的面积可以取作边数不断增加时它的内接和外切正多边形的面积的平均值。这可能是西方应用极限计算圆面积的最早设想。对这一思想做出重大发展的是欧多克斯(公元前 408～公元前 355)，相应的方法被后人称为“穷竭法”。这一方法被欧几里得记述在《几何原本》第 12 章中，继欧多克斯、欧几里得之后，阿基米德(公元前 287～公元前 212)对穷竭法做出了重要贡献，这位“数学之神”证明了 $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{10}{70}$，还算出了球的体积和表面积、抛物线弓形的面积等。

虽说穷竭法发展到阿基米德可谓达到了高峰，可由于当时没有变量的概念，没有引入数值的计算，该法完全束缚在几何形式之中；当时也无完整的符号系统，完全用语言来叙述，所以穷竭法使用极不方便，所以自阿基米德之后，在相当长的时期内便无人注意。

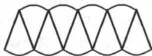
(二) 15 世纪以前的东西方

西方没有什么进展,有进展的主要是东方的中国和印度。

我国三国时期(公元后 3 世纪)的数学家刘徽在《九章算术》的注文中，第一次把《庄子》中的极限思想用于算“圆田”和“弧田”的面积，创立了一种推求圆周率的方法，即“割圆术”。刘徽先在圆内作内接正 6 边形 S_6，S_6 的面积不难求出。

再继续算出正 12 边形、正 24 边形，……。他指出：“割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣。”这等同于现代微积分中的极限思想。他得出了 $\pi=3.14=\frac{157}{50}$(徽率)。

古印度的数学家，对圆却采用了类似切西瓜的办法，把圆切成许多小瓣，再把这些小瓣对接成一个长方形，用长方形的面积去代替圆面积。



二、微积分的先驱工作(16 世纪左右)

(一) 圆的面积之迷的继续探寻(17 世纪)

到了 17 世纪，德国天文学家开普勒在 1615 年出版了《葡萄酒桶的立体几何》一书，书中介绍了一种他独创的求面积的新方法：把圆分割成许多小扇形，不同的是他一上来就把圆分成无穷多个小扇形，因为太小了，所以小扇形又可用小等腰三角形来代替。

$$S_{圆}=\frac{1}{2}R\cdot\overline{AB}+\frac{1}{2}R\cdot\overline{BC}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}R\cdot(\overline{AB}+\overline{BC}+\cdots)$$

$$=\frac{1}{2}R\cdot(\overline{AB}+\overline{BC}+\cdots)=\frac{1}{2}R\cdot 2\pi R=\pi R^2$$


开普勒

继开普勒之后,意大利物理学家伽利略的学生卡瓦利里深入研究了上述求积方法,认为这每一小扇形的面积到底等于不等于零,就不好确定了。他想:开普勒为什么不再继续分下去了呢？要是真的再细分下去,那分到什么程度为止呢？陷入沉思之中的卡瓦利里从衣服的布和一本书

的构造上得了启示，经过反复琢磨，提出了求面积和体积的新方法“不可分元法”，并于 1635 年在意大利出版了《不可分量几何学》一书。

这可以说是积分学的先驱工作，其中“不可分元法”被认为是当时最好的“求积”方法之一。联想定积分、二重积分的定义以及微元法我们都会发现它们有着千丝万缕的关联。

(二) 微分学的先驱工作(17 世纪)

十六七世纪的自然科学提出了大量的数学问题，微分学主要与以下两个问题相关联：①求曲线在任一点的切线；②求变量的极值。

1650 年左右，法国数学界的三巨头：罗伯瓦尔(Gilles Persone de Roberval, 1602～1675)、费马(Pierre de Fermat, 1601～1665)、帕斯卡(Blaise Pascal, 1623～1662)，对这两个问题作了深入的研究。罗伯瓦尔借助合成运动速度作切线，他从运动的角度出发，将切线看做描画这曲线的运动在这点的方向；解析几何的创史人笛卡儿与费马则从几何的角度出发，认为切线是当两个交点重合时的割线；费马还借助微小增量作切线，此外他对问题②，也提了较好的方法(即先求 $f'(x)$，再令 $f'(x)=0$，解之即为极值点)。



费马

费马出身于商人家庭，大学时代学法律，毕业后以律师为职业，长期任所在地区(法国南部土鲁斯)议会的议员，他被称为“业余数学家之王”，虽然年近 30 岁后才认真注意数学，但对数论、解析几何、概率论以及微积分都有重要贡献，他一生性情好静、谦虚，生前很少发表论文和著作，去世后，人们才在他的手稿和他读过的书页空白处的批注中发现他的卓越见解。后人把它们汇集成书，共两卷。

这里主要介绍帕斯卡、瓦里士(John Wallis, 1616～1703)和巴罗(Barrow, 1630～1677)的工作。



帕斯卡

帕斯卡的父亲(Etienne Pascal)也是数学家，对他的独子自幼精心培养，传说父亲希望小帕斯卡先打好古代语的基础，不许他过早接触数学，以免过度紧张的思考损害健康。所以将一切数学书籍都收藏起来，可是这禁令反而激起了帕斯卡的好奇心。他 12 岁的时候，追问父亲几何学究竟是什么。父亲简单回答说：“几何学是使作图正确无误的方法，并找出各图形间的比例关系。”说完之后，马上禁止帕斯卡再谈这些事。然而帕斯卡激动的心情不能抑制，他思考上述的定义，用木炭在地砖上作图，自立定义，自行证明，竟能独自推出三角形内角和等于二直角的定理。这使他父亲惊喜若狂，并给他一本

欧几里得的《几何原本》，再也不阻止他钻研数学了。帕斯卡 16 岁时发现了非常有名的“帕斯卡六边形定理”，1640 年出版了《圆锥曲线论》。帕斯卡终生为病魔所缠，失眠症和牙疼经常骚扰他的安宁。1658 年难以忍受的牙疼使他彻夜不能入睡，一气之下，他奋起工作，穷八昼夜之功，完成了《摆线论》的名著。他 19 岁时发明了世界上第一台机械加法计算机；23 岁时推测大气压力的存在，还发现流体力学的“帕斯卡原理”。他还是概率论和射影几何的奠基人之一，提出了算术中的“帕斯卡三角形”；在积分学上他用“无穷小矩形”取代了卡瓦利的“不可分元”算出了以曲线 $y=x^2$ 为一边的曲边形的面积；在微分学上，他把无穷小概念引入数学，出版了《四分之一圆的正弦论》(1659)。事实上，他的工作对莱布尼茨的微积分产生了直接的影响。25 岁的时候，当他正享有科学家的盛誉时，竟突然决定放弃这些科学研究，献身于哲学和宗教，这种难以理解的行动，不能不说是科学界的极大损失。

瓦里士是英国最富独创性的数学家之一，早年在剑桥学神学，从 1649 年起是牛津大学的“沙维教授”，在微积分的先驱者中，瓦里士的算术化工作很有意义，可以说，没有算术化就没有牛顿的微积分。他的著作《圆锥曲线论》与《无穷小算术》都是很有名的。他第一次用符号 ∞ 表示无穷大，用 $1/\infty$ 表示无穷小或零量，并把它们与有限数同样看待，一起参加运算，他还引入了“变量极限——这是变量所能如此逼近的一个常数，使得它们之间的差能够小于任何给定的量。”还经过复杂的推理，算出


瓦里士

$$\frac{4}{\pi}=\frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdots(2n-1)(2n-1)\cdots}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots 2n\cdot 2n\cdots} \qquad \text{(瓦里士公式)}$$


巴罗

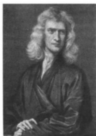
对牛顿影响最大的是他的老师英国的伊萨克·巴罗，他也是微积分发展史上的重要人物之一，他还是神学家，精通希腊文和阿拉伯文，曾任剑桥大学教授、副校长，1669 年即牛顿 26 岁的那年，他主动宣布牛顿的学识已超过自己，并把“路卡斯教授”的职位让给牛顿，他的主要著作为《光学和几何讲义》(1669)，他偏爱几何，对即将临产的微积分也有深刻的理解，他曾设想曲线是由所谓的“线元”构成的，他最有意义的贡献是把“求切线”和“求积”作为互逆问题联系起来了。

经过薄暮、黑夜、黎明，这一神秘的时代以费马和巴罗为标志而结束，这时微积分的诞生已经到了水到渠成的阶段，就像窗户纸一样一捅就破。自然上帝将这一重任委以牛顿与莱布尼茨。

三、微积分的诞生(17 世纪后半期)

17 世纪后半叶，英国的牛顿和德国的莱布尼茨以其卓越的天才首先明确地认识到求积问题和作切线问题之间的互逆关系，建立了微积分基本定理，并且系统地总结出一套强有力的无穷小算法，也正是因为这几点，使他们俩成为微积分的创立人。

17 世纪是英国的天文学、力学、物理学以及数学大发展的年代，也是英国人才辈出的年代，瓦里斯、巴罗、哈雷、胡克、格利高里等都是牛顿同时代的人物，而牛顿则是这些人的杰出代表。


牛顿

伊萨克·牛顿(Isaac Newton，1642～1727)于 1642 年 12 月 25 日出生于英国林肯州的一个叫乌尔索浦的小村子里，父亲是农民，在牛顿未出生前就去世了。牛顿是不足月的遗腹子，生下来时一升的杯子就装得下他，但他竟活到 85 岁的高龄，牛顿一生只掉了一颗牙，从来不戴眼镜，头发虽然在 30 岁时就变白，但到老都没有脱落，直到晚年身体一直很健康。

牛顿 3 岁时母亲再嫁，他由外祖母抚养，14 岁时，母亲再寡，又同他在一起生活，由于生活所迫，牛顿停学务农。在儿童时期，他就发明了风筝、机械玩具、磨和钟，因为他显示了如此高的智力，他的舅舅把他送进了学院学习。1661 年牛顿考入了剑桥大学的三一学院，作为减费生，1664 年 21 岁获学士学位，接着当了研究生。1665～1667 年，伦敦流行鼠疫，剑桥大学关闭，牛顿回农村住了 18 个月。在这期间他发现了二项式定理，酝酿了微积分原理，提出了万有引力定律，也研究了光的分析。牛顿一生的最大成就都发轫于这期间，这时他才 23 岁。这期间发生了关于他的几件轶闻：苹果与万有引力、初恋的失败、聚精会神的荒唐事。1667 年，瘟疫过去，牛顿又回到剑桥大学，由于他在数学上的出色成就，他的老师巴罗认为他的学识已超过自己，于 1669 年 10 月把“路卡斯教授”的职位让给牛顿。1690 年以后是牛顿最难过的岁月，由于为《自然哲学的数学原理》的写作付出了巨大的劳动，他的身体渐渐不支，患了严重的忧郁症。他又不断因科学发明权而与人打官司：在光学问题上与胡克争吵，在天文学方面与格林威治天文台台长弗拉姆斯蒂德闹翻了，在微积分的发明权上更是与莱布尼茨闹得全欧洲都议论纷纷。不久他的母亲去世，更使他心痛欲绝，他的一个要好的学友财政部长查尔斯·蒙塔古，1696 年(在他 54 岁时)任命他为造币厂的督办，年俸约五六百英镑，1699 年又任厂长；1703 年他被选为英国皇家学会的主席，任此职直到去世；1705 年被女王封为爵士。牛顿晚年同巴罗一样研究神学，写有《约翰启示录》

(150 万字)，1727 年 2 月 28 日，牛顿以 85 岁高龄在伦敦主持了皇家学会的一次会议，突然胆结石症发作，昏迷了一天一夜，守在床边的有侄女凯瑟琳，有他忠实的朋友，《自然哲学的数学原理》第一版的出版助手哈雷和第二版助手彭伯顿。他醒来时说："是的，我该走了，连科茨(牛顿的助手)他都先走了，我还留在这里干什么？我本来就是上帝的仆人，早该回到他的身边。这一生，我为自然哲学，为我们至高无上的上帝尽了一点义务。我不知道世人将对我如何评价，不过我自己觉得我只不过像一个孩子，在海滨嬉戏，不时拾起一块较光滑些的石子，一个较美丽的贝壳，高兴地赏玩，至于真理的大海，则在我的面前还远未被发现呢。"1727 年 3 月 20 日，牛顿病逝，英国政府为他举行了国葬，葬仪极其隆重，正如法国文学家伏尔泰所说："我曾见到一位数学教授，只是由于贡献非凡，死后葬仪之显赫犹如一位贤君。"

如果问："谁是历史上最伟大的科学家？"大多数人都会立刻异口同声地说：牛顿。尽管他也有他自己的一些缺点，例如，他是一个很糟糕的讲演者，还或多或少是个胆小怕事的人，是个喜欢自我怜悯的好哭的人，而且有时还容易灰心丧气，但是作为一个科学家来说，那是没有人能够和他相比的。

他一生关于微积分的主要著作有三部：《运用无穷多项方程的分析学》、《流数法和无穷参数》、《自然哲学的数学原理》，他主要是从运动学来研究和建立微积分的。他的微积分思想最早出现在 1665 年 5 月 20 日的一页文件中，这一天可作为微积分诞生的日子。在他的著作中称连续变量为"流动量"，记 x、y、z 等，把它们的导数称为"流数"，"流术"等。

牛顿死后，亚历山大教皇写到：自然和自然规律沉浸在一片黑暗之中，上帝道："牛顿出世了！"于是，一切都变得明朗起来了。

当然牛顿自己说："如果我所见的比笛卡儿的远一些，那是因为，我站在巨人肩上的缘故。"

再谈另一位在帕斯卡的好朋友、数学家惠更斯的影响下成长起来的数学巨人柯特弗里德·威尔赫·莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz，1646～1716)，他出生在德国东部莱比锡，父亲是莱比锡大学道德哲学教授。父亲对小威尔赫的智力做了开发，母亲给他奠定了拉丁文和希腊文的坚实基础，在 14 岁时，他几乎浏览了父亲的所有藏书，立志当一名哲学家。1661 年秋天，15 岁的他考上莱比锡大学，攻读法律专业。由于对欧氏几何的求知欲，于 1663 年转入耶拿大学跟数学家厄哈德·维格尔学习数学，19 岁那年，莱布尼茨以优异的成绩从莱比锡大学毕业，获哲学学士学位，而后进阿尔特道夫大学继续进修，一年后(1666 年)写了关于一般推理方法的论文《论组合的艺术》，经过答辩之后，立即被授予博士学



惠更斯



莱布尼茨

位，鉴于他的才智，教授们一致推荐他担当本校教授。1669年，莱布尼茨辞去了大学的教职，到美因兹选帝候的政府中任职，他决心为整个社会服务，他在公务之余悉心钻进数学和力学的圈子里，1670～1671年他写了第一篇力学论文，经过一年的努力，终于在1671年制成了第一台乘法计算机，1671年冬天，作为大使被遣到巴黎，这时(26岁)的他才开始认真研究数学，他在巴黎生活的4年，是他在数学方面的“发明创造的黄金时代”。在这期间，他与荷兰数学家、物理学家、天文学家惠更斯的会晤，激起了他对数学的兴趣。此外他已构想出他所建立的微积分的主要特征，他创立微积分主要是从几何学的角度出发，他的微积分思想最初体现在1675年的手稿之中。1684年，他在《学艺》杂志上发表的论文《一种求极大极小和切线的新方法》是历史上最早公开发表的关于微分学的文章，1686年，他在该杂志上又发表了历史上第一篇关于积分学的文章。他还是历史上最杰出的符号创造家之一，他所发明的微积分符号，远远优于牛顿的符号，对微积分的发展有重大的影响，现今通用的符号 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\int$ 等以及名称《微分学》和《积分学》都是莱布尼茨创立的，1689年在罗马他结识了在中国住了6年、并准备再度赴华的意大利神父格里马蒂，对中国(龙的国度)发生了浓厚的兴趣，1697年，根据这些人提供的素材，他出版了一本名为《中国的最新消息》文集，1698年，他从鲍威特处得到《易经》要义，他被其中的“太极图”迷住了，如痴如醉，他从八卦中悟出了一个最简单的记数制系统“二进制计数制”。1699年，他写出一篇论文《论二进制的算术》，1714～1716年他花费了两年时间终于完成了多年为之劳累的那部不朽作品《勃兰斯威克王族的族谱》，1716年11月14日，他在凄风雨苦中离开了人世，当时只有秘书一人悲痛地给他送葬。他是一位多才多艺的学者，他的学问包括：哲学、历史、语言学、生物学、地质学、机械、物理、数学、神学、法律和外交等众多方面，如果他再专一点的话，他肯定能做出更大的数学成就。



麦克劳林



泰勒



约翰·伯努利



雅各布·伯努利

牛顿与莱布尼茨的微积分都存在着不足，从 17 世纪末开始以及整个 18 世纪，在西欧各国的科学界、思想界展开了一场规模宏大的激烈争论，在英国，牛顿及其维护者们同英国天主教的大主教贝克莱为微积分的真理性展开了一场争论；在欧洲大陆，以莱布尼茨为中心的大陆派与法国科学院院士洛尔以及荷兰的物理学家、数学家尼文太关于微积分展开了一场大辩论，他们都是抓住微积分赖以建立的基础——无穷小大肆攻击，声称应立刻把微积分从数学中“剪裁掉”。另一场大争论是在英国派与大陆派之间进行的，他们是为关于建立微积分的优先权问题。牛顿的支持者是著名数学家泰勒与麦克劳林；莱布尼茨的维护者则是著名的数学家伯努利两兄弟。争论把欧洲科学家分成势不两立的两派，其结果是英国和欧洲大陆的科学家停止了思想交换。我们不准备在这里讨论牛顿和莱布尼茨之间的这场不幸的争论，其实他们彼此独立地发现了微积分。当然牛顿发现在先，而莱布尼茨发表得早。莱布尼茨没有像牛顿那样对数学研究得深，但他的知识则较广，并且作为一个分析学家和数学物理学家他虽都次于牛顿，但他也许对于数学形式有比较敏锐的想象力和卓越的本能。因为牛顿在微积分方面的主要工作和《原理》中使用了几何方法，所以在他死后差不多 100 年中，英国人继续以几何为主要工具；而欧洲大陆则接受了莱布尼茨优越的符号之后，加以发扬光大，很快地获得了丰硕的成果。

四、微积分的蓬勃发展(18 世纪)

十七八世纪的数学史，几乎全部是数学分析的历史。这时期的微积分开始蓬勃发展，一方面它以前的发展和微积分的许多更基本的技巧的发明结合到一起，另一方面这种更精致的数学被应用于力学和其他科学，当然从应用中又产生出更多的数学问题。

这一时期的绝大部分数学家都对数学分析感兴趣，以下将从师生与学术影响的角度简介发展状况，在英国，英国派继承了牛顿的遗产并做了一些值得称道的工作。那一时期的代表人物有乔治·贝克莱、瓦里斯、巴罗，他们之后有巴罗的学生牛顿、科林斯、格里高利，牛顿的追随者有泰勒(Brook Taylor，1685～1731)、麦克劳林(1698～1764)、托马斯·辛普生。约翰·兰登(英皇家学会的会员,《残差分析》对导数定义提出了代表性方案之一“代数的微分学”)。

在欧洲大陆，以莱布尼茨为中心的大陆派继承并发挥光大了原有的工作。那一时期其代表人物有被誉为法国三巨头的：罗伯瓦尔、费马、帕斯卡，更有在帕斯卡的好朋友惠更斯影响下成长起来的莱布尼茨、洛尔、莱布尼茨的朋友伯努利兄弟(雅各布·伯努利、约翰·伯努利)，之后有约翰·伯努利的两个儿子(尼古拉、丹尼尔)和学生(欧拉和洛必达)，以及在他们的影响下成长起来的达朗贝尔和被誉

为“3L”的拉普拉斯、拉格朗日(欧拉的学生)、勒让德，他们的继承人有傅里叶、泊松。

由于这些数学家的努力，产生了常微分方程、偏微分方程、级数论等。

五、微积分现代形式的确立(19世纪)

17世纪中叶微积分建立以后，分析学飞快地向前发展，18世纪达到了空前灿烂的程度，其内容的丰富，使人来不及检查和巩固这一领域的理论基础，因而遭受到种种非难，19世纪初年，许多迫切的问题已基本上得到解决，数学家便开始了基础的重建与严格化。

以下从函数概念的发展、极限理论的完成、实数理论的建立这三方面结合数学家简介如下。

(一) 函数概念的发展

首先由傅里叶、柯西等冲破函数的解析式，之后狄利克雷、罗巴切夫斯基用对应观点给函数下了定义，最后由黎曼给出了今天的形式。


柯西


魏尔斯特拉斯


波尔查诺


戴德金

(二) 极限理论完成

波尔查诺的工作堪称是它的先驱，而柯西的工作才使它基本完成，之后，由狄利克雷、黎曼等的贡献，经过魏尔斯特拉斯的工作才彻底完成极限理论(ε-δ语言)，可以说极限概念的历史是从动态化过渡到静态化的历史。

(三) 实数理论的建立

柯西用极限概念为微积分奠定了基础，在这个基础上魏尔斯特拉斯又进一步

的算术化，但并不等于微积分基础研究已到了终结，人们愈来愈觉得建立实数连续系统的必要性和迫切性。

代德金的实数理论是它的现代形式，康托尔的贡献使微积分建立在集合论上，从而给了微积分一个更坚实的基础。

由于康托尔在1874年所创立的《集合论》，他的关于无穷集的理论可以说是这部无穷交响乐的高潮。

六、微积分的新发展(20世纪)

微积分这部无穷交响乐还在演奏，引人注目的变化是20世纪初由H. 勒贝格(Lebesgue, 1875～1941)将实函数的积分概念作了推广，提出了包罗广泛的积分理论L积分(即实变函数理论)。

1966年A. 鲁滨逊(Robinson, 1918～1974)为无穷小概念提供逻辑基础时，提出了非标准分析。



H. 勒贝格



A. 鲁滨逊

可以认为上述的两个新发展都是当代数学的重大发展，它们更多地涉及未来而不是过去。

历史是需要回头看的，在人们匆匆忙忙地行进着的时候，为着也许遥远的也许并不遥远的目的地，所注意的是晨昏交替以及十字路口的红绿灯，就连路边的景致甚至是挤在同一条路上的同路人都无暇顾及。不仅如此，有谁顾得上回头看看自己或别人的脚印？

上述种种仅仅是故事吗，仅仅是轶闻趣事吗？不，它还是历史，在历史的长河里，有的被扬弃了，有的被洗刷了，有的被遗忘了，也有的从它出现的那一时刻起便留到了史册上，文字只是符号，语言仅是载体，其实它自身的轨迹便是壮丽的史诗，它是在推动历史某一方面的前进中为历史所首肯的，历史的经验显示：它的出现往往是因为小人物的智慧、胆略和百折不挠的精神。让我们发扬这种精神，勤奋努力为这部无穷交响乐谱写更美、更壮丽的乐章吧！

参 考 文 献

傅钟鹏. 1988. 莱布尼茨. 成都：四川少年儿童出版社
克莱因 M. 1979. 古今数学思想（1～4 册）. 张理京，张锦炎译. 上海：上海科学技术出版社
梁宗巨，张奠宙，王庚等. 2000. 科学家大辞典. 上海：上海辞书出版社
沈燮昌，邵品琮. 1991. 数学分析纵横谈. 北京：北京大学出版社
Dunham W. 1991. Journey Through Genius. Published in Penguin Books
Maury J. P. 2001. 牛顿——天体力学的新纪元. 上海：汉语大词典出版社

6　古今数学之谜（上篇）

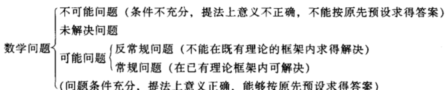
数学究竟是由什么组成的？公理吗？定理吗？证明吗？概念吗？定义吗？理论吗？公式吗？方法吗？诚然，没有这些组成部分，数学就不存在，这些都是数学的必要组成部分。但是数学真正的组成部分即数学的心脏是问题和解。

纵观数学与数学文化的发展史，数学问题是数学中的一种疑难和矛盾，它的提出和解决是推动数学发展的重要力量。

自然界里奇异变幻的现象，生活中丰富多彩的内容，向数学家们提出了许许多多的“为什么?”，自然科学向数学提供大量富有成果的问题，而数学本身也不断地向自身提出新问题，于是构成了种种问题和有趣的猜想。

凡在数学史上一个较长时期中未解决的问题，即称为古代数学之谜；凡至今仍未解决的问题，叫做今日数学之谜。（由于常规问题很多且常见，例如：数学教科书上习题、现代数学文献上的文章，大都是此类，故不再赘述）

下面对数学中形形色色的问题作一个分类：



以下分三篇（上、中、下）详细介绍古今数学之谜（难题）的由来、解决的情况与启示，最后简介其他数学之谜、希尔伯特 23 个问题与 21 世纪数学问题。

古代三大难题

凡学过平面几何的人，多半都听到过其中有三大难题，即几何作图三大难题：三等分任意角，二倍立方体，化圆为方。

正确的提法是：

① 三等分任意角：在仅限于用直尺作直线，用圆规画圆弧的条件下，通过有限次步骤，把任一已知角三等分。

② 二倍立方体：按上述问题规定的条件，通过有限次步骤，作一个体积为已知立方体体积二倍的立方体。

③ 化圆为方：按前面两个问题规定的条件，通过有限次步骤，作一个面积与已知圆面积相等的正方形。

（要求是：只准用无刻度的直尺和不含量角器的圆规作图）

早在公元前400年左右，这三个问题就由古希腊的巧辩学派提出来了，希腊学者是在解决某些简单作图之后自然引申出来的，他们最初使用直尺和圆规，曾不费劲地解决了角的二等分问题，自然启示他们去找任意角的三等分问题，并相信一定能够达到目的，又因为他们成功地作出了一个面积为已知正方形面积二倍的正方形之后，自然而然就提出问题②，同样通过作两条线段的比例中项，能将矩形化为其等积的正方形，又通过把三角形的高二等分，能将三角形等积地化为矩形，从而也就能化为正方形；由于任意凸多边形可分解为若干个三角形。所以凸多边形也就化为与其等积的正方形。直线形等积互化的解决，很自然地引导他们考虑问题③。

为解决这三个问题，历代数学家们不知花费了多少心血和精力，然而谁也没有达到目的。由于谁也没有见过一个作法解答，所以许多人都以为这三个问题迄今尚未解决。不少人怀着满腔希望的心情，拿着圆规和直尺多方尝试，盼着能寻到一个作法，在19世纪之前，几乎世界上每一个重要的科学研究机关，都曾收到过数以千计的三大问题的“解答者”的来信，经过2000多年的奋斗，数学家证明了其实这三个著名的问题是不可能问题，为摆脱这种无休止的麻烦，1775年巴黎科学院能过一项决议：不再审查关于“三等分角”、“倍立方体”和“化圆为方”的论文。尽管如此，近百年来仍然有一些人醉心于解这三大难题，他们不顾前人的理论证明，试图奇迹般地独步古今中外，成为三大难题的“解答者”，这里引用华裔（美籍）几何学家杨忠道教授的一则比喻是很有说服力的。

一位在农村成长而未受过任何教育的父亲，非常爱惜他的一位聪明的儿子。在儿子离家几十里外求学的时候，父亲因为太想念儿子，每隔几个月要去探望一次。也许是他个人的习惯，每次去都是步行的。后来儿子去邻县工作，父亲还是维持以往的习惯，每隔几个月就步行去探望儿子一次。最后难题来了，儿子到一海岛上去工作。当父亲想再步行去探望儿子时，一些人告诉他说，那是不可能的。因为父亲没有受过任何教育，他很为下列诸问题所困扰：

1) 海岛是什么地方，为什么不能步行前去呢？是否可能途径是存在的，只是迄今为止不被人发现而已？

2) 以往他见到过的地方，处处都是可以步行而去的。为什么海岛就不同？用过去生活的经验，难道还会有错吗？

3) 天下无难事，只怕有心人。他认为自己不但有心，而且肯努力，难道有这么多的优良条件，他仍无法达到目的吗？

只要有一定地理知识，不能步行去海岛是显而易见的。但这位父亲不了解，

而且受困扰，这只是因为他缺乏地理知识的缘故。

尝试用圆规和直尺去解答三大难题，正像这位父亲尝试步行去海岛一样，那是不可能的，换句话说根本不存在一个作法使三大难题中任何一个得到解答。并非“作法是存在的，只是没有被发现而已”，正像步行到海岛的途径根本不存在一样。

古希腊人说的圆规直尺作图，即柏拉图的限制指的是没有刻度的直尺，在《几何原本》中有如下的规定：

直尺的用法是：①经过已知两点作一直线；②无限制地延长一直线。

圆规的用法是：以任意一点为中心，过其他任意一点画一个圆。

对圆规的使用方法，在后来的几何书上，一般规定为：以任意一点为中心，任意给定的长为半径，画一个圆或者一段弧；作图时，只能有限次使用直尺和圆规，不能使用无限次。

这就是圆规直尺作圆方法，又叫做初等几何作图方法，简称规尺作图。

此外，一般还加上一条：两条已知不平行直线，可以作出它们的交点；已知直线和圆或者弧，两已知圆或者弧如果相交，可以作出它们的交点。

关于三大作图难题的传说，其中流传最广的是立方倍积的故事。

公元前 400 年左右，希腊第罗斯岛流行传染病，很多人死亡，人们争先恐后地到神庙去，祈求太阳神阿波罗的保佑。神庙的负责人说，如果把上供的正方体的祭坛，不改变原来的形状，体积增大到原来的两倍，太阳神就会高兴，瘟疫就会被制止，不消说，人们赶快就去改造祭坛。但是，祭坛改造好了，传染病不但没有停止，反而蔓延得更加严重。恐慌的人们只好去请教神庙的负责人了，负责人说：“我说体积改造为原来的两倍，而你们却造了原来的八倍，不合要求，神不高兴啊！”可怜的人们赶紧把祭坛改成体积是原来的两倍。可瘟疫照样没有停止的迹象，只好再去请示，这一回的理由是：“你们只是在原来的基础上，再增加一个同等的正方体，这虽然是原来的两倍，可是我说的是不改变原来的形状呀！”这下可把倒霉的第罗斯岛人难住了。当时有人求出这样的正方体的棱，只不过不是按严格的规尺作图法作出来的。柏拉图就认为这是破坏几何学固有的优美，不合要求，是断然不行的。可是严格的按规尺作图方法，不但柏拉图没做出来，而且始终无人作出来。

其实古希腊三大难题，难就难在规尺作图的种种规定上，若是不要求严格按规尺作图，那么这三个问题就算不了什么难题。

例如，在直尺上作记号 M 和 N，阿基米德和巴卜士当时都给出了三等分任意角的作法，而有人用两块三角板也解出了立方倍积，关于化圆为方也有许多近似解法。如达·芬奇的解法。

17 世纪笛卡儿与费马创立了解析几何以后，最先突破的是高斯，18 岁的高


高斯

斯（当时还是哥廷根大学学生）按规尺作图法作出了正 17 边形。不久，他提出理论证明了按规尺作图方法，根本就做不出正 7 边形、正 9 边形、正 11 边形和正 14 边形等。所有这些问题，都是延续了 2000 多年没有得到解决的难题。

这是一项惊人的成就。他从思考的方法上，促进了规尺作图三大难题的研究和解决。

这时人们对规尺作图可能作出的与不可能做出的图形，逐渐有了深入的认识。如：

1）在规定某一线段的长度是单位长度 1 后，我们要作的线段的长度，可以由该单位长度 1，经过有限次加、减、乘、除、开平方后得出来，那么这一线段就能用规尺作图法作出。

2）圆规直尺作图法所能作出的线或者点，只能是经过有限次加、减、乘、除及开平方所能作出的线或者点。


伽罗瓦

1837 年，23 岁的万彻尔（P. L. Wantyel，1814～1848）提出了立方倍积与三等分任意角不可能用规尺作图法解决的证明（万彻尔是借助解析几何给出证明），这宣布了 2000 多年来，人类征服初等几何三大难题取得了重大的胜利，虽然有些角（如直角）可以用规尺作图法三等分，但是有些角不可以（如 30°角），事实上，在 1830 年，19 岁的法国数学家伽罗瓦就提出了解决这一类问题的系统理论和方法，他所开创的数学工作，形成了近现代代数学，他是群论的奠基人，以伽罗瓦的名字命名的伽罗瓦理论，指明 5 次以上的代数方程，不可能有一般的根式解，初等几何作图三大难题，以及高斯关于多边形作图的定理等都不过是一些明显的推论或者简单的例题、习题罢了。


欧拉

所以现在的专门著作，一般着重讲伽罗瓦理论，而对万彻尔的工作并不十分注意。在这三大难题中，化圆为方问题是最后得到解决的。根据伽罗瓦理论，如果 π 是超越数，那么，化圆为方是规尺不可能问题。

何为超越数？这一概念是由欧拉提出来的，数学的定义是：凡是能满足某个整系数代数方程的实数，叫做代数数；凡不是代数数的实数，都叫做超越数。如$\sqrt{2}$是 $x^2-2=0$ 的根，$\sqrt{2}$为代数数，由此可见，超越数必然是无理数，但是一个无理数是不是超越数，那就需要证明了，π 是无理数这一证明很简单，然而 π 是一个超越数，直到 1882 年德国数学家林德曼才证明。

到此，这三大难题全部彻底解决。

1895 年，F. 克莱因又进一步给出三大问题不可能用尺规来完成的简单而明晰的证明，1985 年扬忠道教授也给出了较简明的证明。

这之后有一阵子，讨论各种作图工具可能与不可能作出什么样的图形，简直成了热潮，人们还得到了三等分角近似等分圆周法，只用直尺或只用圆规的作图等花样很多很多，德国数学家比伯巴赫证明了：用圆规与直尺作图，要是可以利用两直角边和直角顶点，那么，按规尺作图法可解问题①、②。



比伯巴赫

三大难题的讨论给我们启示有以下几点：

1）不可能问题虽然本身大都没什么重大的科学价值，但为了弄清他们的真实性往往都需要打开一个全新的数学领域。因此，它们常常成为某些重大数学发现的生长点。例如，“五次方程（代数）根式求解”、“欧氏第五公设证明”、“化圆为方”等不可能问题，为群论、非欧几何、微积分的发现提供了原始的生长点。

2）不要再搞三等分角等这类问题了。

参 考 文 献

克莱因 M. 1979. 古今数学思想．(1～4 册)．张理京，张锦炎译．上海：上海科学技术出版社

刘健飞，张正齐 .1989. 数学五千年．武汉：湖北少年儿童出版社

单墫 .1999. 十个有趣的数学问题．上海：上海教育出版社

张楚廷 .1999. 猜想，一道绕不过的湾．长沙：湖南教育出版社

张奠宙，赵斌 .2002. 二十世纪数学史话．上海：知识出版社

7　古今数学之谜（中篇）

近代三大难题

它们是：费马大定理（1621）、哥德巴赫猜想（1742）、四色地图问题（1852）。

在近代三大难题中，前面两个属于数论，四色问题是最后被提出来的，却是最先被解决的。

（一）四色问题

1. 由来

它最先是由英国人古斯里（Francis Guthrie，1831～1899）提出来的。1852年，刚从伦敦大学毕业的古斯里，写了一封信告诉他的兄弟费雷赘克说，在他看来，画在一张纸上的每一幅地图，都是可以最多只用四种颜色，就能使有共同边界的国家有不同的颜色，他问是不是有什么方法，可以从数学上证明这个结论。（原始提法）

一个有趣的传说

从前有个国王，他临死前担心死后五个儿子会因为争夺疆土而互相拼杀，立下一份遗嘱，遗嘱中说，他死后可以把国土划分成五个区域。让每个王子统治一个区域，但是必须使任何一个区域与其他四个相邻，至于区域的形状可以任意划定。遗嘱中又说，如果在划分疆土时遇到了困难，可以打开我留下的锦盒，里面有答案。

国王死后，五个王子开始划分国土，他们各自寻找了一个聪明人去画一幅符合老国王遗嘱的地图。可是，这些聪明人怎么也画不出五个区域中任意一个都和其他四个区域接壤的地图。

聪明人换了一拨又一拨，为了尽快瓜分国土，五位王子费尽了脑筋。可是，符合要求的地图还是没画出来！无可奈何，王子们同意打开老国王留下的锦盒，看看老国王怎样分法，有什么高招儿。

五个王子打开锦盒一看，里面没有地图，而是老国王留下的一封亲笔信。信中嘱咐五位王子要精诚团结、不要分裂，合则存、分则亡。这时，他们才明白，遗嘱中的地图是画不出来的。

这个古老的传说告诉我们，平面上的五个区域要求其中每一个区域都与其余四个区域相邻是不可能的。地图上的不同国家或地区，要用不同的颜色来区别，那么绘制一张地图需要几种不同的颜色呢？如果地图上只有五个区域，由上面的传说可以知道只要四种不同颜色就够了。若区域更多一些，四种颜色够用不够用呢？

1852 年，英国年轻的绘图员古斯里在给英国地图涂颜色时发现：如果相邻两个地区用不同的颜色涂上，只需要四种颜色就够了。



德·摩根

古斯里把这个发现告诉了正在大学数学系里读书的哥哥费雷赘克，并且画了一个图给他看，这个图最少要四种颜色，才能把相邻的两个部分辨开，颜色的数目再也不能减少了。他的哥哥相信弟弟的发现是对的，但是却不能用数学方法加以证明，也解释不出其中的道理。

在大学念书的费雷赘克解决不了这个问题，便拿去请教他的老师、当时著名的数学家德·摩根（De Morgan），德·摩根也不能回答这个问题，他当天就写了一封信给哈密顿（W. R. Hamilton），他俩都未能解决，四色问题便进入了数学家的圈子。

2. 提法

我们知道现在世界上的国家和相当于国家的地区，总共不超过 200 个。画出它们的地图来，用四种颜色就够了，这是很容易办到的。

但是，作为一个数学问题来说，要讨论研究的，不是哪一张具体的地图，而是一个概括所有地图的着色问题。即这个着色问题，不仅国家的数目可以是任意给定的，而且国家的边界也可以是各式各样的，包括直的、弯的和绕来绕去的，人们见过的和没见过的，想得出来的和没有想到的，等等。所以，它可以是任何一个国家的省分区县分区的地图，也可以是随便画的或者任意编造的地图。

此外，四色问题指的是正规地图。即有两条限制：

1）在这种地图中每个国家必须连成一片。如图 7.1 不正规。

2）在这种地图中，两个国家的边界必须是条线。（直线、曲线都可以，但不能是一点）如图 7.2 不行。

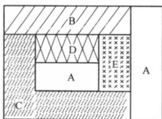


图 7.1

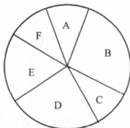


图 7.2

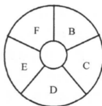


图 7.3

德·摩根在得到四色问题之后，便对这个问题进行研究。他成功地证明了：不可能有五个国家处于这样的位置，其中每个国家都和其余四个国家相邻。于是，他根据这个结论断定：任何地图只要四种颜色就够了。但是该方法不合逻辑。因为仿此推理，如果有张地图的国家满足这样的条件：不可能有四个国家处于这样的位置，其中每一个国家都和其余三个国家相邻了。那么，就应该断定这张地图，只要三种颜色就够了。而图 7.3 就是一反例。德·摩根不能证明或者推翻四色问题，就把它交给了英国数学家哈密顿。直到 1865 年哈密顿逝世时为止，这个看上去非常简单的问题也没有解决。



闵可夫斯基

很多人在开始接触这个问题的时候，往往以为它很好解决。在哥廷根大学，闵可夫斯基可以说是一位相当谦虚的谨慎的著名数学家，在一次讲授拓扑学课时，偶然谈到了这个定理，他当时说：“这条定理还没有得到证明，但这是因为到现在为止，只有一些第三流的数学家对它进行过专门研究。”他以一种少有的自负向全班学生宣称：“我相信我能够证明它。”于是当场开始证明这条定理。这堂课结束时，他还没有证出。



凯莱

到下一次全班上课时，他又继续证明。就这样，一连几个星期过去了。最后，在一个阴雨的早晨，闵可夫斯基走进教室，这时恰好一道闪电，空中雷声大作。他站到讲台上，面朝着大家，温和的闵可夫斯基显出一幅深沉、严肃的表情："老天也被我的骄傲激怒啦，因为我没法解决四色问题。"接着他就从数周前中断的地方继续讲拓扑学。

1872 年，英国当时最有名的数学家凯莱（1821～1891）正式向伦敦数学会提出了这个问题，1878 年，他把这个问题公开通报给伦敦数学会的会员，征求证明。


肯普

不到一年，1879 年首先宣布证明了四色问题的是一个会员（同时也是个律师）肯普（Alfred Bray Kempe，1849～1922），他发表了一篇论文，接着泰特于 1880 年也发表论文，都宣布证明了四色问题。在这之后的一段时间里，人们甚至认为四色问题已经解决了。


希赫伍德

可是，肯普的证明在 11 年后的 1890 年被数学家希赫伍德（Peray John Heawood，1861～1955）证明是错误的。值得一提的是，他成功地应用了肯普的方法，证明了画在一张纸上任何正规地图，可以最多用五种颜色就够了。这就是著名的五色定理。甚至还对示性数为 $K<0$ 时的曲面上的地图着色数 P_k 给出了上界$\frac{1}{2}$（$7+\sqrt{49-24k}$），但是四色猜想依然故我。希赫伍德从青少年起，就钻研四色地图的问题，一直到成为白发苍苍的老科家，前后 60 多年，可以说花费了毕生的精力。

而泰特的文章被指出是不严谨的。其中的一个错误论断一直拖到 1946 年，才被加拿大数学家托特举出反例所否定，这与论文发表时相距 66 年。

数学家斯蒂芳曾设计了一非常有趣的游戏用于检验四色问题：

游戏由甲乙两个人参加，甲先画一个闭合曲线围成的区域让乙填上颜色，乙填好颜色之后再画一个区域让甲填色，…，如此继续下去，尽量使对方不得不使用第五种颜色。时至今日还没有一个人找到一张必须用五种颜色才能填的图。

肯普的证明虽然有错误，却包含着许多天才的想法。进入 20 世纪以来，人们就是沿着他的想法逐步接近成功的。肯普的证明形式是反证法，他先假设一幅地图非得要五色才能涂色不可，然后推出矛盾就行了。肯普先把问题转化成只研究一种所谓的正规地图，在这种地图上他证明了总得有一个国家的邻国≤5，同时引进了"可约构形"的概念（粗糙地说，可约构形是不应该出现在地图上的）。然后他分成①两个邻国；②三个邻国；③四个邻国；④五个邻国，按照这四种情况来检查有没有出现"可约构形"。如果都有矛盾就出现了。对于①～③他证明

得很成功，而对于④，他跌倒了，证明中有错误。

20世纪的数学家从他跌倒的地方前进。1913年，G. D. 伯克霍夫引进了一些新的技巧，这使得1939年富兰克林（P. Franklin）证明了22国以下的地图都可以用四色着色。1950年温（Winn）把22改进为35，1968年奥尔（Ore，1899～1968）达到39，他也是惟一的一本关于这一问题的专著《四色问题》的作者。1975年有报道，52国以下的地图四色定理都成立，可以看出进展很慢。其实困难还是在老地方，肯普未能证明④是可约构形，换一种说法就是④分得远不够细。1936年献身于四色问题的希西（Heesh）早就认为肯普的路子是对的，但他在1950年时猜测，如果要把情况分细以至于达到可以证明的地步，可能要分一万多种情况才行，这样的工作量当然不是人所能完成的。

电子计算机的出现使得上面这条路有了前途。从1950年起希西与他的学生丢莱（Karl Diirre）做的工作就是围绕着怎样用计算机来检查一个图形是否是可约构形。虽说希西曾相信可能要分一万种情况，但谁也不知道是否真的只有一万种？而且对一种不太复杂的情况检查一下就要用上百个小时，更复杂的（在时间、存储上）计算机也都不能承受。比方说若按1970年有些人的方案，就是用当时的计算机来算，也需要连续不断地工作10万小时，也就是说，要连续不断地计算11年以上，才能得出结论。这个任务太艰巨了。因此要证明四色问题是一项非常艰巨的任务。

1970年以后，人们又大大地改造了证明四色定理的方案，而且计算机的能力及其使用方法也有了飞快的进步，为机器证明四色定理创造了条件。

1972年起，伊利诺斯大学的哈肯（W. Haken）开始对希西的技巧作了重要的改进。随后他与阿佩尔（K. Appel）正式决定解这个问题。他们认为，现在数学家手里的技巧，不足以产生一个非计算机的证明。从1972年起，他们两人一方面从理论上继续简化问题，另一方面利用计算机的试算和人机对话获得了有益的信息。1976年，他们认为问题可以压缩到机器能进行证明的地步了。

从1月起，他们就在伊诺斯大学的IBM360机上开始分情况检查，实际上是分了1482种情况，一一验证了它们都是可约构形。

1976年6月，在3台不同的高速电子计算机上，用了1200多小时的时间做了大约200亿个逻辑判定，终于完成了四色定理的证明。伊利诺斯数学杂志的审稿人对他们证明的审查，也是通过电子计算机来进行的。

阿佩尔与哈肯（美国数学家）的工作，使延续了124年之久的四色问题得到了证明，成为四色定理。

(1) 四色问题的余波与新思考

四色问题的研究，促进了数学的发展，一个重要的收获是人们把地球仪上的着色问题加以推广，研究了各式各样形状物体表面的地图着色问题，提出了更为

广泛的猜想。如其中一则猜想是：画在像自行车内胎或者救生圈形状的物体表面的任何正规地图，需要 7 种颜色就够了。这已被证明。

四色问题是大难题，它曾考验着人类的智慧，吸引着人们去踩出前人没有走过的路，电子计算机证明的这个消息不胫而走。人们历来只知道电子计算机能够计算，至于证明定理，则整个的理论还十分幼稚。然而这次却对四色问题这种超级难题进行了证明，真是闻所未闻。

这一成果轰动世界，同时也引起了很大的反响，反应也是多种多样的。其中持怀疑或保留态度的大有人在。还有一些数学家从哲理上提出了不少新问题。

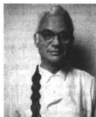
1）由于计算机证明十分繁复的，为此人们提出了一个问题：对于四色定理有没有可能在将来给出一个手算的证明？会不会有一些定理的证明从根本上说其工作量不借助计算机就不能完成？

2）如果这种计算机证明的程序达 400 页，在大型计算机上运算 1200 小时，谁去核算？用什么办法？用计算机吗？要是检验的机器又发生错误呢？奥尔关于 40 国以下的地图可用四色着色的证明，用很简练的文笔写出也在百页以上，很少有人愿意去检查这种证明，但从来无人表示过怀疑。人们对于人的手算的证明为什么比计算机证明还要信任？

（2）余波未息

电子计算机越来越深入地介入到数学本身的各个领域。近年来，关于一个大数素数性的检验，关于一个有限单群的构造性证明，以及初等几何、初等数论的机器证明理论的诞生，都说明它很可能成为数学思想发展史上一系列新想法的起点，其意义是巨大的。

前几年数学界传闻阿佩尔和哈肯关于四色问题的证明是错误的。这到底是怎么回事？1976 年，他们用计算机检验 1478 种图形后，断言四色问题已解决，这一消息迅速传遍全世界，但是他们的证明对不对，却没有得到进一步复验和证实。


杜勃

著名概率学者杜勃（Doob）提出了一个杜勃定律：“随机地打开数学论文，在两页之内能找到一个错误。”阿佩尔和哈肯的上述论文发表之初，杜勃向哈肯打赌时说：“要 5 个月内一定会出现错误。”哈肯则提出补充：“当我注意到这个错误后，两星期内一定能加以改正。”结果是许多印刷错误和小的论证错误陆续被发现，但哈肯却在两周内一一改正。

但是，论文中错误仍不断地被发现。阿佩尔和哈肯一直忙于订正。他们把错误分成 3 类。第一类是小错误，几分钟即可改正，第二类是中等错误，改正它需要几小时，第三类较大的错误，通常需要好几天才能改正它。1981 年，U. 施密

特在他的博士论文中，将阿佩尔和哈肯的计算机证明中的计算机程序的40%，用手算方式逐一检验，结果发现了14个第一类小错误和一个第三类的较大的错误。这篇博士论文传送到世界各地，于是“计算机没有证明四色问题”的传闻随之而起。

许多读者向著名的数学杂志《数学信使》询问四色问题究竟对不对？该杂志请阿佩尔和哈肯回答。他们写了一篇文章“四色问题的证明是充分的”刊登在该杂志第8卷第1期上（1986年）。文中试图介绍这一证明的原始思想，让读者了解怎样得到这一证明，并解释为什么在检验影响细节时突然出现的错误不会影响证明的正确性。他们最后表示：“我们将肯定地评价对我们证明中剩下的60%加以独立的核实，而且欢迎当找到进一步错误时能通知我们。我们已完成了对各种补充的材料进行计算机核验的计算机程序，当这些完成后，我们打算出版原始证明的一种完全的校订本。”

看来传闻根据不足。但是，数学界对计算机证明的怀疑还远未消除，四色问题计算机证明的细节仍有待于进一步核实。

（二）费马大猜想

又称费马大定理，费马最后定理，费马问题。

1. 由来

1621年，公元3世纪希腊著名数学家丢番图的《算术》一书，刚刚译成法文，20岁的费马便从书店里买了一套，他在书中关于不定方程 $x^2+y^2=z^2$ 的全部正整数解这一页上，用拉丁文写了一段话：

“任何一个数的立方，不能分解为两个数的立方之和；任何一个数的四次方，不能分解成两个数的四次方之和；一般来说，任何次幂，除平方以外，不可能分解成其他两个同次幂之和。我已经找到一个绝妙的证明，但这本书的空白太小容纳不下。”

这段页端的笔记，用数学语言来表达就是：形如 $x^n+y^n=z^n$ 的方程，当 $n>2$时，不可能有正整数解。

事实上，费马是一个十分活跃的业余数学家并被誉为“业余数学家之王”，这位律师兼议会的议员对数论、解析几何、概率论、微积分都有很多重大贡献，但他生前几乎没有出版过什么著作。他的著作大都是在他死后，由他的儿子，把他的手稿和与别人往来的书信整理出版的。其中有人翻阅他那本丢番图的书时，发现了那段写在书眉上的话。1670年，他的儿子出版了费马的这一个页端笔记，人们便知道了这一问题。

费马问题的迷人之处，在于它的内容如此简单，如此容易理解，即使具有一般数学知识的人好像也能解决。比如，要证明 $x^3+y^3=z^3$ 没有非零整数解，前10个整数的立方是1，8，27，64，125，216，343，512，729，1000。不难看出其中没有一个数可以表示为另外两个数的立方之和。借助于电子计算机甚至可以证明10位以内数的立方，不可能是其他两个立方数之和。困难的是整数有无穷多个，不管用什么样的电子计算机也不可能对无穷多个数进行检验。

费马问题引起了数学家的注意，许多大数学家为解决费马问题花了不少心血，也取得了一定的进展。

2. 艰难的证明旅程

起初数学家们想重新找到费马没有写出来的那个“绝妙证明”一举把这个定理彻底证明，但是谁也没有成功。

于是，人们开始逐个证明。300多年来，很多数学家钻研了这个问题，但也只能证明某些特殊情形：

1）著名数学家欧拉（1707～1783年）证明了方程 $x^3+y^3=z^3$ 和 $x^4+y^4=z^4$ 不可能有正整数解。

思路：证明了 n 等于某个正整数时，方程无解；那么 n 等于这个正整数的任何正整数倍时，方程也无解，如 $x^6+y^6=z^6$，$x^8+y^8=z^8$ 等也无解。

分析：显然，如果能证明 n 等于任何奇数时，方程无解，那么 n 等于任何数时，方程肯定就无解（因为任何数一定至少是某一个奇数的倍数或自身）。因此在正整数中，只要证明奇数时的情形就行了。再加上 $n=4$ 的情形已证明。费马问题就解决了。

2）狄里克莱、勒让德（1823年）证明 $n=5$ 的情形。狄里克莱、莱梅、勒贝格（1840年）证明 $n=7$ 的情形。就这样，一个又一个奇素数证下去的长征便开始了。

3）1849年德国数学家库默尔，用近世代数的方法，引入了他自己发现的“理想数”的概念，指出费马问题只可能在 n 等于某些值时，才有可能不正确，所以只需对这些值进行研究。


库默尔

研究费马问题最有成就的要数德国数学家库默尔，他几乎用了一生的时间来研究这个问题。虽然他没有最终解决，但是提出了一整套的数学理论，推动了数学的发展。法国科学院为了表彰库莫尔的贡献，给他发了奖。

有趣的是，有的数学家自以为解决了费马问题而欣喜若狂，但是后来有人指出证明中有错误，结果是一场空欢喜。比如数学家拉梅在法


勒贝格

国科学院的一次会议上宣布自己已经证明出“费马大定理”。但是当他讲解自己的证明方法时，数学家刘维尔当场就指出他的证明是行不通的，使拉梅感到十分困窘。数学家勒贝格晚年也沉迷于解决费马问题，他向法国科学院呈上一篇论文，说用他的理论可全部解决这个问题。法国科学院十分高兴，如果勒贝格真能解决，法国就可以向全世界宣布这个300年前由法国人提出来的世界难题，最终由本国人解决了。法国科学院组织了一批数学家仔细地研究了勒贝格的论文，发现其证明也是错误的。勒贝格拿着退回来的论文不甘心地说：“我想，我这个错误可以改正的。”但是，直到他去世，也没有解决这个问题。

他特别指出，在100以内，只有37、59、67这3个数是要考虑的。他还具体证明了当 $n=37$、$n=59$、$n=67$ 时方程 $x^n+y^n=z^n$ 无正整数解。于是他证明了 $n<100$ 的情形。

到20世纪上半叶，数学家把证明推进到奇数 $n=619$。在1850年及1853年，法国科学院曾两次悬赏征解，都未收到正确解答。

4）1908年，德国数学家沃尔夫斯克尔逝世的时候，把他的10万马克赠给了德国哥廷根数学会，作为费马问题的解答奖金。

按照哥廷根数学会宣布的决定，奖金在100年内有效，即到公元2007年有效。哥廷根数学会不负责审查稿件。论文在公开发行的书籍或者杂志上发表两年以后，才能考虑评奖。

霎时间，除了专搞数学一行的人以外，很多工程师、牧师、教员、大中学校学生、银行职员、政府官员和一般市民，都风起云涌地钻研该问题。在很短的时间内，各种刊物公布的证明就超过了1000个。

当时，德国有一个名叫《数学和物理文献实录》的杂志，自愿对这方面的论文进行鉴定。到1911年初为止，它共审查了111个“证明”，全都是错误的。审稿的沉重负担，实在使它受不了，于是宣布自已停止这方面的审查鉴定工作。但是，证明的热潮继续汹涌澎湃，直到第一次世界大战的枪声响后，证明工作才转入低潮。

一场空前的风暴袭击了整个数学界，并且波及到数学界以外的许多领域，当年主管这方面的人员之一丹吉格曾经这样描述：“整个城市都沸腾起来了，成千上万的老师、学生、商人、市民、……都被卷进来了，人们着了迷，单就1908～1911年3年间，就收到1000份‘完全’的证明，虽然，有人惊叹：难道这是‘化圆为方’问题？难道这是要搞‘永动机’吗？可是探索者仍然此起彼伏，方兴未艾……然而，毫无例外，所有应证者的方法和结论都是错误的。在这阵疯狂似的浪涛面前，朗道想了一个主意，印制一份复函的标准格式，这才使我们略微

轻松一些。幸好，我们事先规定，寄来的答案必须是印刷件，否则……”。

朗道设计的复函标准格式是：

亲爱的先生（女士）：您对费马最后定理的证明已经收到，现予退回。您第一处的错误出现在第____页第____行。

丹吉格不无遗憾地指出：“我们非常赞许这些人的热情，但是，可惜得很，他们之中的大多数人对于前人的成果几乎毫无所知，甚至连库莫尔那样的创造性贡献也不了解。当然，并不是说，非要应用库莫尔的方法才行，不过，毕竟他已经替我们进行这方面的研究数十年……”

由于德国是两次世界大战的战败国，马克多次大幅贬值，所以 10 万马克折合成今天的马克也不值几个钱。不过，热爱科学的数学家们，很多人在继续从事着这一工作。

1976 年美国数学家证明了 $2<n<100000$ 的情形。根据新泽西州默里山的贝尔实验室的罗纳德、格雷厄姆说：“数学家已经用电子计算机证实，对直至 100000 的 n，这个费马猜想都成立。”

据 1978 年报道，已经证明到当 $2<n<125000$ 的奇素数以及它们的倍数时的情形。

$n>125000$ 的奇数情形也证明了不少，据说，最大的奇素数 n，已接近 41000000 左右。



法尔廷斯

3. 费马问题重大突破

1983 年夏天，德国伍伯塔尔（Wuppertal）大学 29 岁的数学讲师格尔德·法尔廷斯（Gerd Faltings）出人意料地证明了被认为 20 世纪是绝对不可能解决的代数之谜莫德尔猜想，从而使费马问题获得重大突破。

这里简单地介绍一下莫德尔猜想以及与费马问题的关系。



莫德尔

1922 年，著名的英国数论学者刘易斯·J. 莫德尔（Lewis J Mordell）在《剑桥哲学会会报》上发表了一篇文章，文中他提出：“如果 $F(x,y)$（二元多项式）是有理系数的多项式，且 $F(x,y)=0$ 的亏格$\geqslant 2$，那么 $F(x,y)$ 至多只有有限组有理数解。”

简单与通俗的说明如下：

相当大的一类代数曲线（无法具体解释“一类”代数曲线是指的什么，因需太多的数学知识）上最多只有有限多个有理点。上面的 $x^n+y^n=z^n$（$n>2$）也包括在这一类中。

德国数学家法尔廷斯花了 18 个月的功夫证明了这一猜想，他的证明是一份

40页的打印稿，不是代数几何方面专家的数学家，要想看懂这个证明，非得下一番功夫不可，因为证明中用了大量的代数几何方面的近代成果。

它与费马问题的关系，实际上：相伴曲面上至少有二个洞的各类方程一般是至少4次的方程。其中最著名的就是所谓费马曲线。这个猜想的另一种形式是：$x^n+y^n=z^n \Rightarrow \left(\frac{x}{z}\right)^n+\left(\frac{y}{z}\right)^n=1$，即 $x^n+y^n=1$ 没有非平凡的有理数解（$n\geqslant 3$）。即当 n 为奇数时，只有2个平凡的有理数解 $x=1$，$y=0$ 或 $x=0$，$y=1$，当 n 为偶数时，只有4组平凡的有理数解 $x=\pm 1$，$y=0$ 或 $x=0$，$y=\pm 1$。这就是说，他证明了 $x^n+y^n=z^n$（$n>2$）如果有正整数解，解的个数是有限的（或者说：费马问题不成立可能情形至多只有有限个），这结论与费马问题的解决还差了一大截，但却是公认的在库莫尔之后最重要的进展，并由此形成了一个新的数学分支即算术代数几何。

1984年10月，美国南加利福尼亚大学艾德曼和英、法两国的几位数学家都部分地证明了费马大定理，这被称为攻克费马大定理历史上的辉煌进展。1986年法尔廷斯因此获当年的菲尔茨奖，这是公认的数学界中相当于诺贝尔奖的最高奖励。

对费马问题人类已经进行了300多年的大规模探索，如果企图用初等数论的方法来解它，大概是不可能的了。在探索的过程中，数学家创造了不少新颖的数学方法、新的数学概念、定理，发现了包括代数数论在内的一些新分支。据说20世纪最伟大的数学家之一希尔伯特曾声称：他能够解开这个难题，可是由于在求解此问题过程中给数学的发展创造了不少新的途径，一旦这个难题解决，也许这些有益的副产品就得不到了，所以他故意回避而不予解决。希尔伯特曾满怀深情地说："我应当更加注意，不要杀掉这只经常能为我们生出金蛋来的母鸡。"后来他又说：他不是不能证明或否证这个定理，但是要做这件事，"我至少要花3年时间去研究许许多多的问题，而到头来，还可能会失败。"因此，他放弃了这个企图。

今天，这条定理仍然是业余数学爱好者很感兴趣的诱惑品，正如美国数学家爱德瓦德说的那样："数学家经常漂游去还未解决的问题的汪洋大海之中，但是力图解决费马最后定理在将来正如过去一样，必将给我们带来数学上的重大进展。"

费马在书页上的那段话使数学家们花了360多年的时间，且毫无结果，不少人对他颇有微词，笛卡儿就说他爱吹牛，英国数学家瓦里士干脆骂他："该死的法国佬。"德国一位企业家沃尔夫斯克尔，就是一个着迷了的人。据记载，他一度想要轻生，终于想到还有这个定理没有证明，于是打消了自杀的念头。此后他更改了遗嘱，于1908年悬赏当时的10万马克，授给在2007年9月13日前能证

明这个定理的人。按当时的购买力来计算，约合今天的200万美元。后来，因为第一次世界大战以后德国的恶性通货膨胀，10万马克变得一文不值了，只不过因为时隔90多年，加上利息，到1997年颁奖时，大约不到5万美元。

1997年6月，大约500多人聚集在德国哥廷根大学，参加为普林斯顿大学怀尔斯教授颁发一项大奖的典礼。就是上述提及的10万马克奖。



怀尔斯

现在让我们来谈谈最后的胜利者怀尔斯，他是英国人，生于1953年。10岁那年，他的数学老师在课上谈到了费马大定理，从此该问题便深深扎根于他的心中。当时正值20世纪50年代末，数学上出现了一件重大的事情。原来，在数学的两个不同领域之间发现了一种深刻的联系。一个领域是关于椭圆曲线，这应该是属于代数和数论这个大范畴中的一个对象。椭圆曲线已经是当时数学研究的热点之一，在研究中人们发现每一个椭圆曲线都有一个L级数。另一个领域是复分析，就是研究以复数为自变量的函数的数学分支。这里面有一种具有很丰富对称性的函数叫做模形式。模形式的研究其实在19世纪末年就已经盛行开来，因为它有多方面的重要性。模形式也有一个L级数。于是人们自然会问，这两个L级数有什么关系呢？那时有两个年轻的日本数学家谷山丰和志村五郎对这个问题做了一些研究。首先是谷山丰提出了一个猜想，从本质上说这个猜想可以把椭圆曲线和模形式通过L级数的研究密切地联系起来。用后来志村五郎60年代初在美国普林斯顿大学时的提法，这个猜想就是：可以把椭圆曲线与模形式配起对来（数学行话叫做一一对应），使得它们具有相同的L级数，或者我们就说：所有的椭圆曲线都是模性的。这就是著名的谷山-志村猜想。与解析几何的出现之作用相类比，这里指出，能把两个不同领域联系起来，必然是影响深远的高质量科学研究。因此，谷山-志村猜想很快就成了数学中的一个热点。那么，它与费马大定理有什么关系呢？

曙光出现在1984年。那年秋天，德国数学家弗赖提出了证明费马大定理的新的路线。即首先承认谷山-志村猜想，并用反证法，设费马的方程

$$x^n + y^n = z^n, \qquad n > 2$$

有正整数解。令 $A = x^n$，$B = y^n$，A 和 B 都是完全 n 次幂，而且 $A + B = z^n$ 也是完全 n 次幂。现在我们作一个椭圆曲线——称为弗赖曲线

$$y^2 = x(x - A)(x + B) = x^3 - (A - B)x^2 - ABx.$$

它有一个“判别式” $A^2B^2\ (A + B)^2 = \ (x^2y^2z^2)^n$ 也是完全 n 次幂。如果我们

能证明弗赖曲线是非模性的，则它与谷山-志村猜想矛盾。这样费马大定理就可以得到证明。

余下两个问题，一是证明谷山-志村猜想，二是证明费赖曲线非模。请看一下，在费马提出他的大定理后的350年，问题的面目有了多少改变。如果说这是费马的第三个金蛋，这个说法不尽准确，因为谷山-志村猜想并不是为解决费马大定理而提出的。但至少我们可以说，在征服费马大定理的长征中，我们已看到了三个大“矿”——理想论、算术代数几何、谷山-志村猜想。可见路越走越宽，研究也越来越深入了。

1986年6月，美国数学家里贝特解决了第二个问题，证明了费赖曲线是非模的。为此，他与同事巴里一起获得第一届费马奖。

于是余下的只有一个问题了，即证明谷山-志村猜想。这时，怀尔斯已经来到美国普林斯顿大学任教。当他在剑桥大学读研究生时，导师劝他去研究“主流”的数学去研究椭圆曲线，把费马问题放在一边，但最终正是椭圆曲线圆了他童年的梦。当他得知里贝特的成果时，他知道，最后冲刺的时刻到了，只要再突破谷山-志村猜想就可以大功告成了。

于是怀尔斯把自己关起来，整天呆在小阁楼上，把电话也拆了，知道他在做什么的只有他的妻子和普林斯顿大学数学系的系主任及几位教授——其余的人都不知道怀尔斯意欲何为。这一下就是整整7年。应该说，这很不容易：因为当代对于一个职业数学家来说，随时要发表论文的压力是很大的。美国科学界流行一句话：“要么论文，要么完蛋”（publish or perish）。所以应该感谢普林斯顿大学这几位教授支持怀尔斯7年不发表论文。

留给怀尔斯的只有一件事：证明谷山-志村猜想。这个猜想至今也还没有完全解决。幸运的是，怀尔斯不必证明全部猜想，他只要对相当大一类椭圆曲线去证明这个猜想，而且这一类中还包括弗赖曲线就行了。怀尔斯确定了这一个类，称之为半稳定椭圆曲线。为了征服最后一个堡垒，他花了整整7年时间，可以说用上了有关数论的全部新式武器。大家绝不要以为在书店里能买到的数论书上就有这些武器。就这样怀尔斯仍然完全不知从何着手。他在事后回忆自己的体验时说，搞数学时常就是这样，好像走进一座黑暗的大厦。走进第一间房间，完全是一片漆黑，你跌跌撞撞，不时撞在家具上。慢慢地你摸清楚了什么地方有什么家具，最后，经过六七个月，你摸到了电灯开关。你打开灯，突然一切都清楚了，你才知道你自己在哪里。于是你又走到隔壁房里去，在黑暗中再摸六个月。每一个这样的突破，有一些立刻就得到，有一些花上一两天，但是不经过在黑暗中摸索几个月却是不可能的，这些突破都是摸索的结晶！终于，怀尔斯证明了下面这个定理：

定理 每个半稳定椭圆曲线都是模性的。

这个定理只是谷山-志村猜想的一部分，但正是证明费马大定理所需的那一部分。

怀尔斯

现在，怀尔斯相信自己的冲刺已得到了成功。于是他在剑桥的牛顿数学科学研究所的一次会议上宣布了这个结果。据说位于美国旧金山伯克利的国家数学研究所于1993年6月在大剧院举行关于费马最后定理的证明报告会时，15美元一张的门票，被炒到25美元。据参加过这次会议的人回忆，怀尔斯在这次会上的讲演共分成2天，讲演的题目完全没有涉及费马大定理。但是到第二天讲完，人们预感会出现了不起的东西，所以第三天，即1993年6月23日，来的人特别多，而且不少人带来了照相机、摄像机。最后，怀尔斯不动声色地在黑板上写道："费马大定理由此得证。"据出席者的回忆，先是寂静无声，突然是一阵阵掌声，一阵阵闪光灯的照耀，以及拨动照相机、摄像机的声音，以纪念这个历史性的时刻。许多人跑出去用电子邮件向全世界通告这个消息，第二天，世界大报纷纷以大量篇幅报道。美国的《纽约时报》于6月24日刊登了长篇的、很内行的报道，标题是："世代的数学之谜，终于高呼'Eureka'!"（据说阿基米德在浴盆里突然想到了浮力定律，兴奋得来不及穿衣服就跑到街上，高呼Eureka——我发现了!）。在我国，没有那么多电子邮件，不少留学生也连夜打来越洋电话，报道喜讯。

但是，高潮才过，就开始了严格的审查工作。不久，普林斯顿大学的卡兹教授（其实他就是怀尔斯主要支持者之一）发现了一处基本性的错误。很可能，怀尔斯童年的梦想将成为一场噩梦。

于是怀尔斯又躲了起来，这一次还带了他的一个学生泰勒。又不知经历过多少煎熬，到1994年8月，怀尔斯回忆说，几乎要放弃了。这时泰勒建议，对出问题的那一部分再检查一次，为什么他们采用的方法不行。本来怀尔斯打算采用一种所谓岩泽理论的办法，后来觉得不久前一位俄罗斯数学家提出的所谓欧拉系统更好一些。在泰勒的帮助下，怀尔斯发现还是原来的方法更好，其中缺失的关

键一步也补起来了。怀尔斯回忆说“真是美丽得难以置信；又简单，又漂亮。第一天晚上我带着它回了家，带着它睡了。第二天早上我又核算了一次，然后我下楼告诉我的妻子，‘我得到了，我想我找到了’。她完全没有思想准备，以为我谈的是小孩的玩具什么的，所以她问我‘得到什么?’我说‘我完成了证明，我得到了它’。”当时为 1994 年 9 月 19 日。国际数学界认可了这一结果，350 年的悬案终于尘埃落定。这是一场典型的人类智力竞赛，胜者为王。怀尔斯是 20 世纪最后 10 年内的数学英雄，他将被永远载入数学史册。菲尔茨奖规定获奖者年龄必须在 40 岁以下，怀尔斯刚超过，故无缘此奖，但他获得了另一项最高奖——沃尔夫奖（1998 年）。

故事至此告一段落。普林斯顿的数学系为了祝贺，请他讲演自己怎样苦干了 8 年圆了童年的梦。1995 年 5 月《数学年刊》（Annals of Mathematics）以整整一期刊登了两篇文章，第一篇是怀尔斯的长文，共 100 多页，题为“模椭圆曲线和费马最后定理”；另一篇就是泰勒解决的关键一步：“赫克代数的某些环论性质”。问题既了又未了，发表了一篇文章，就会引起世界各地许多人去讨论它、研究它，也许又会发现其中有错，也许会有人觉得何必用如此高深的办法，于是会去找出更简单、更容易的办法。更说不定，又会有人在《数学年刊》的书沿上再写点什么：“我已有了一个绝妙的证明……”

就在怀尔斯的证明完成以后不久，著名的美国科学杂志《科学美国人》上就有人写文章说费马的最后定理确实是最后的定理，怀尔斯的证明也是最后的证明，今后的数学应该是“实验的数学”，再也不必花上几百年时间去证明一个看来十分简单、却困难得无法说明、而且证明以后也没有什么用处的定理了。那么，这种数学证明的意义何在?

应该十分明确地指出，数学绝非如费马定理那样的“大”定理和许多不知名的“小”定理的堆积。它是一个蕴藏丰富的矿藏。几个世纪以来第一流绝顶天才的数学家的努力的意义是什么？从费马定理的证明过程中我们看到，带给我们的主要不是这种或那种机智的小技巧，而每一个技巧的出现似乎只不过是为了证明，其发明者比他的祖先更聪明，智商高出那么百分之一乃至千分之一。我们看到从证明费马定理的过程中带来了素因子惟一分解的问题，我们看到，在有些环中素因子分解的结果是惟一的，而在另一些环中则不是。许多第一流数学家正是在这个问题上摔了跟头。而这个问题的意义远远超越了数论的领域。我们还看到，在征服这个难题的过程中，引出了库莫尔的理想论，而如果对理想论的基本概念都不知道，或者连“理想”是一个数学概念这件事都不知道，就很难算是一个数学系合格的大学生。我们还看到，在近代，与此相关还出现了椭圆曲线理论(但是很难说，椭圆曲线理论就是为了解决费马大定理问题而建立的，对于素因子惟一分解问题和理想论，也应该这样说)。后来又出现了谷山-志村猜想，还提

出了把分析与代数两大数学领域统一起来的问题。这些问题的研究对数学的发展和推动远非一个定理所能比拟。而且决不能说这些理论就是为了在后人证明费马大定理时能用上，恰如一个穷人的后代可能是亿万富翁一样。数学家齐民友曾用找矿的问题作了一个很确切的比喻，他说："费马大定理犹如一颗光彩夺目的宝石，它藏在深山绝谷的草丛之中，由于偶然的机遇被人看见了，由于它的美丽，吸引了不少人想去取得它，不少人甚至为此跌到深渊之下。但是在征服它的路上，人们找到了丰富的矿藏。这种矿藏不是阿拉丁的宝库，里面的东西也不一定都是光辉灿烂的宝石，但是它可以带来一个个新的产业部门。没有这种矿藏，这颗宝石可以成为价值连城的珍宝，甚至如高斯所说：'数学是科学的女皇，数论是女皇皇冠上的钻石。'但是有了这种矿藏，连同其他的矿藏，却成了人类文明的基础的一部分。"

（三）哥德巴赫猜想

1. 由来与提法

哥德巴赫本来是德国（普鲁士）派往俄罗斯的一位公使。但后来他成了一名数学家。

哥德巴赫和费马一样，很喜欢和别人通信讨论数学问题。不过他在数学上的成就和声望，远远不如费马，他是彼得堡科学院院士。他与欧拉经常通信，有15年以上的通信历史，经常讨论的是一些数学问题。

1742年6月17日，他写信告诉当时住在俄国的大数学家欧拉，说他想冒险发表一个猜想："大于5的任何数是3个素数的和。"（注：当时，人们把1看成是特殊的素数；后来，才把1与素数严格区别开来）同年6月30日，欧拉在给哥德巴赫的回信中说，他认为："每一个偶数都是两个素数之和，虽然我还不能证明它，但我确信这个论断是完全正确的。"

这次通信的内容传播出来后，当时数学界把他们两人通信中谈到的问题，叫做哥德巴赫问题。后来，它被归纳为：

命题A：每一个大于或者等于6的偶数，都可以表示为两个奇素数的和；

命题B：每一个大于或者等于9的奇数，都可以表示为三个奇素数的和。

这就是今天我们所说的哥德巴赫猜想，实际上，应该是哥德巴赫-欧拉猜想。比如

$$50 = 19 + 31 \qquad 51 = 7 + 13 + 31$$
$$52 = 23 + 29 \qquad 53 = 3 + 19 + 31$$

当然，表示方法可能是很多的。比如

$$50 = 3 + 47 = 7 + 43 = 13 + 37 = 19 + 31$$

显然，如果命题 A 题成立，则命题 B 成立。（事实上，假设 N 是大于或者等于 6 的偶数。命题 A 成立，就是存在着奇素数 P_1 与 P_2，使得 $N-3=P_1+P_2$，这就是 $N=3+P_1+P_2$。）

反之，如果命题 B 成立，并不能保证命题 A 就一定成立。

2. 艰难的探索



哈代

整个 19 世纪结束时，尽管很多大数学家都研究过它，但哥德巴赫问题的研究没有任何进展。曾有人作了些具体的验证工作。如，直到 33×10^6（3300 万）以内的偶数都是对的。问题是较大的偶数怎么样？



兰道

1900 年，希尔伯特在巴黎国际数学家会议上，提出了 23 个著名的难题，哥德巴赫问题曾被第 8 个问题所涉及，1912 年在第五届国际数学家大会上，著名的数论大师兰道在报告中说："即使要证明下面的较弱的命题：任何大于 4 的正整数，都能表示为 c 个素数之和。这也是现代数学力所不能及的。"

过了 9 年，到了 1921 年，著名数论大师哈代在哥本哈根召开的国际数学会议上说："哥德巴赫猜想的困难程度，可以与任何没有解决的数学问题相比拟。"哈代也认为是极其困难的，但是不像兰道说得那样绝对。

但是，20 世纪数学迅速发展的事实，响亮地回答了兰道的挑战。



维诺格拉多夫

1937 年，苏联著名数学家伊·维诺格拉多夫，应用英国数学家哈代和李特伍德创造的"圆法"和他自己创造的"三角和法"证明了充分大的奇数，都可以表示为 3 个奇素数之和。

他基本上解决了命题 B，其结论通常被称为"三素数定理"。事实上，命题 B 所说的是每一个大于或者等于 9 的奇数，都可表示为 3 个奇素数之和。所谓充分大，比方说 10 万，但对于剩下的那一部分从 9 到 10 万的有限个奇数，命题 B 真否，留待以后去检验。

华罗庚 1938 年证明了几乎所有偶数都能表示为两奇素数的和，也即哥德巴赫猜想几乎对所有偶数都成立。（1941 年华罗庚还证明了 $N=P_1^k+P_2^k+P_3^k$（$k\in\mathbf{N}$）P_1，P_2，P_3 为奇素数，N 为充分大奇数）


华罗庚

命题 B 基本上被解决了，有人认为只差一步就到命题 A 了，谁知这一步的腿迈出了 50 多年还没有着地。

数学家们一般遇到一些困难的理论问题时，往往有两种方式去进行求解：一是直接地去求证问题结论，即把 $N_{奇}=P_1+P_2+P_3$（其中 P_i（$i=1, 2, 3$）为奇数，$N_{奇}\geqslant 9$）这类式子理解为一个方程式，当 P_1，P_2，P_3 限制在素数范围内时，解答个数记为 I（依赖于 N），那么它是否大于 0 呢？这就引出了对 I 进行估算的问题，最早对它进行研究的有英国数学家哈代和李特伍德，而成功地做出直接贡献的有苏联数学家维诺格拉多夫和我国数学家华罗庚等人。

另一个方面的研究是将问题先削弱一些，然后逐步逼近而力争解决，这里又分了两个途径：

(1) 弱型哥德巴赫问题

先将 N 写成一些素数的和

$$N = P_1 + P_2 + \cdots + P_k \tag{7.1}$$

[分析]　希望总有一种较好的方法，使得 k 越小越好，特别当 N 为偶数时，若能证明当 $k=2$ 时有解（即有素数 P_1+P_2 使其和为给定的 N），则原来的命题 A 就解决了，现在放宽来研究，当 N 给定之后，能做到怎样的 k，使 k 个素数之和为 N。(目标)

(2) 因子哥德巴赫问题

先将偶数 N 写成两个自然数之和

$$N = n_1 + n_2 \tag{7.2}$$

而 n_1 与 n_2 里的素因子个数记为 α_1 与 α_2，简记为（α_1，α_2），或写成“$\alpha_1+\alpha_2$”。也称为“殆素数问题”，即是否每一个充分大的偶数都可表成两个殆素数之和？(其中殆素数即指素因子的个数不超过某一固定常数的自然数，如 25，26，27，28，29，30。25，26，29 是素因子不超过 2 的殆素数，其余不是，但都是不超过 3 的殆素数。)

[分析]　假若能证明对于每一个偶数 N，总有 $\alpha_1=\alpha_2=1$，也即“1+1”，猜想就成立了。

坚固无比的堡垒正被逐渐攻破（表 7.1，表 7.2）。

表 7.1 关于弱型哥德巴赫问题的研究进展表

结果（k 范围）$k<S$	年代	结果获得者	使用方法	国　度
800000	1930	西涅得曼（25 岁）	自创的“密率法”结合挪威人“筛法”	苏　联
2208	1935	罗曼诺夫		苏　联
71	1936	海尔布朗、兰道、弗尔克		德　国
67	1937	蕾西		意大利
20	1950	夏波罗、瓦尔加		美　国
18	1956	尹文霖		中　国

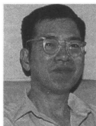
从表 7.1 中可看出，最佳结果属于中国，即偶数 N 时，$k\leqslant18$；奇数 N 时，$k\leqslant17$。没有直接根本的解决。

表 7.2 关于因子哥德巴赫问题的研究进展表

结　果	年 代	结果获得者	方　法	国　度
(9，9)（9+9）	1920	布龙（Bsun）	筛法（自创）	挪　威
7+7	1924	雷特马赫		德　国
6+6	1932	埃司特曼		德　国
5+7，4+9，3+15，2+366	1937	蕾西		意大利
5+5	1938	布赫西太勃		苏　联
4+4	1940	布赫西太勃		苏　联
1+c，c 常数很大	1948	瑞尼		匈牙利
3+3，2+3	1956	王元		中　国
1+5	1961、1962	巴尔班（错误，后改正）		苏　联
1+5	1962	潘承洞		中　国
1+4	1962	王元		中　国
1+4	1963	潘承洞		中　国
1+4	1963	巴尔班		苏　联
1+3	1965	布赫夕太勃、小维诺格拉多夫、朋比尼		苏　联 德　国
1+2	1973	陈景润		中　国

值得说明的是：在 1966～1973 年内出现了陈景润的“1+2”重要结果，他是 1966 年已做到并发表了这一结论及其证明思想，但 7 年中未有人证出，陈景

润详尽地正式写成论文发表是在1973年，《大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和》发表后，世界上就出现了五个简化的证明，其中最好的简单而本质的证明是由中国的丁夏畦、王元和潘承洞合作给出的。陈景润“1+2”结果一发表就引起了世界数学家的重视。英国数学家哈伯斯坦和德国数学家黎希特合著了一本叫《筛法》的数论专著，原有十章，付印后见陈氏“1+2”论文，特为之增添写上第十一章，章目就定为“陈氏定理”。所谓陈氏定理通俗地说：对于任何一个大偶数 N，那么总可以找到奇素数 P'、P'' 或 P_1，P_2，P_3，使得下列两式至少有一个成立



陈景润

$$N = P' + P'' \qquad (\alpha)$$

$$N = P_1 + P_2 \times P_3 \qquad (\beta)$$

当然并不排除（α）、（β）同时成立的情形。如

$$N = 62, \quad 62 = 43 + 19, \quad 62 = 7 + 5 \times 11$$

“哥德巴赫猜想”是数学皇冠上的一颗宝珠，现在有些人认为，从“1+2”到“1+1”只差一步了，但是从1966年到今天，三十几年过去了，虽然又有很多人一再改进了“1+2”的证明，但却没看到下一步棋的步法，这还是个谜，它的结果还很可能出人意料。祝愿捷报早传!

数学未知之谜还有很多，欲知近代和更多的数学未解问题，且听下回分解。

参 考 文 献

克莱因 M.1979. 古今数学思想．(1～4册)．张理京，张锦炎译．上海：上海科学技术出版社

梁宗巨．1995．一万个世界之谜——数学分册．武汉：湖北少年儿童出版社

齐民友．2000．世纪之交话数学．湖北教育出版社

王元．1994．华罗庚．北京：开明出版社

张奠宙．2002．20世纪数学经纬．华东师大出版社

张奠宙．四色问题解决了吗？科学．40卷1期：6

8 古今数学之谜（下篇）

21世纪的数学问题

古今数学之谜（上、中篇）主要介绍了古代数学三大难题和近代数学的三大难题，它们是数学文化极其重要的一部分，在数学教育中它们的作用不可估量，攻克费马大定理的怀尔斯，要不是10岁那年他的数学老师在课上介绍费马大定理的故事，很难想像后来的他与费马大定理会是怎样的关系。古今数学之谜有多少？现代数学重大问题还有哪些？以下介绍一些通俗能懂的未解问题，这些不仅都是大家关心的而且更具现实意义和文化教育意义。

其实古今数学之谜有很多，不少数学分支都出版有相应的未解问题集和提出未解问题的综述报告，而关于现代数学重大问题值得一提的是下面两件事：



希尔伯特

国际数学联盟（International Mathematical Union，IMU）负责召开每4年一届的数学家大会。2002年的国际数学家大会在中国召开，这件事我们是知道的。话说1900年的国际数学家大会，那是1900年的8月6日，第二届国际数学家大会在巴黎召开。年方38岁的德国数学家大卫·希尔伯特作了一个题为"数学问题"的重要演说，在这篇演说中，他提出了23个数学问题。希尔伯特23个问题的标题、推动发展的领域、解决的情况见附录1，他提出了好的问题应具有以下三个特征：

- 清晰性和易懂性；
- 虽困难但又给人以希望；
- 意义深远。

希尔伯特所提出的23个数学问题，给20世纪的数学打上了深刻的烙印。

现在，21世纪刚刚到来，我们为这一世纪提出怎样的数学问题呢？受IMU的委托，蜚声世界的俄国数学家V.I.阿诺德（Arnold）向一些数学家发信，请他们描述21世纪将会研究的重大数学问题。确实，现今的数学面广量大，分支既多又细，已不是一个人可以驾驭的了。因此，IMU希望由阿诺德牵头，集中当今主要数学家的智慧，来预测未来数学的发展。

1997年6月，在加拿大多伦多的"菲尔茨数学研究所（Fields Institute for Mathematics)"举行庆祝阿诺德60寿辰的学术讨论会。S.斯梅尔（Smale）在会

上作了“未来世纪数学问题”的报告。作为对阿诺德信件的答复，这份讲稿在1998年广为流传。

斯梅尔，1932年出生于美国密歇根州，密歇根大学数学博士（1956年），先后在芝加哥大学、哥伦比亚大学、加州大学任教授。早期从事微分拓扑学研究，1966年因证明广义庞加莱猜想而获菲尔茨奖。此后以建立现代抽象的动力系统而闻名。斯梅尔的研究领域很广，包括运筹学、数理经济学、统计力学、湍流等。后来有计算复杂性的著名工作问世。1995年来到香港九龙的香港城市大学任数学教授。斯梅尔的讲稿在《Mathematics Intelligencer》1998年第二期上发表。其中提出了18个未来世纪的重大数学问题，这里摘引18个问题的标题（有些有较完整的陈述）如下：



斯梅尔

（1）黎曼猜想

黎曼函数 $\zeta(s)=\mathrm{Re}(s)>1$ 的所有位于 $0<\mathrm{Re}(s)<1$ 中的零点都集中在直线 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 之上。

（2）庞加莱猜想

一个紧3维流形 M 上的每一个圆周都能形变收缩为一点，则 M 和3维球面同胚（$n>4$ 的情形由斯梅尔于1960年解决，福利德曼（Freedman）在1984年证明了 $n=4$ 的情况。现在只剩下 $n=3$ 的情形了）。

（3）$P=NP$

令 Z 表示由0，1两元素组成的域。设输入了 k 个系数在 Z 中的 n 元多项式，试问能否有一个多项式时间算法来判定它们有没有公共零点？（多项式算法是指这样的算法：它的计算步数由各多项式系数数目的一个多项式所界定）。

（4）多项式的整数零点

一个整数系数的多项式 $f(x)$，其整数零点的个数能否被某不变量的多项式所界定？

（5）丢番图曲线高度的界

要判定一个整系数多项式构成的丢番图方程 $f(x, y)=0$ 能否在 S^c 内有整数解？S 是多项式的“高度”，C 是某常数。

（6）天体力学中相对平衡态数目的有限性

设 n 个天体的质量为 m_1，m_2，…，m_n。问这些天体的相对平衡态的数目是否有限？

（7）2维球面上点的分布

（8）把动力学引进经济学理论之中

把一般的经济学均衡理论的数学推广到包含价格调节的情形。

(9) 线性规划的多项式时间计算问题

(10) 流形上可微逼近的封闭定理

(11) 一维动力学通常是双曲的吗

一个复多项式 T 能否被某同次的多项式 P 所逼近，P 的每个临界点经过迭代会趋向一个周期汇（periodic sink）?

(12) 微分同胚的“中心化子”

(13) 希尔伯特的第十六问题

(14) 洛伦兹吸引子

洛伦兹方程的动力学系统是否就是几何洛伦兹吸引子的动力系统?

(15) 纳维-斯托克斯（Navier-Stokes）方程。

这一流体力学基本方程在3维域中有惟一的整体光滑解吗?

(16) 雅可比猜想

多项式映射的每点都是非奇异的，是否必定一一对应?

(17) 解多项式方程组

以多项式时间找到一个零点的统一算法。

(18) 人工智能是否有极限

即人工智能和人类的智能是否有极限? 极限是什么?

斯梅尔在选择这18个问题时的原则是：

1) 陈述简单。当然这只是相对而言。对非专业数学家来说，这一陈述并不简单。但在现代数学的文献中，这已是相当简明的问题了。

2) 斯梅尔本人比较熟悉，但已发现这些问题不容易解决。

3) 问题十分重要。即使是部分结果，或者是解决问题的任何努力都会对数学发展产生重大影响。斯梅尔特别提到前三个问题是特别重要的。

近几年在国际互联网上可以查到被称为“千禧年数学难题”的七个未解之谜。英国剑桥Clay数学研究所在2000年5月24日于巴黎法兰西学院正式宣布了一件被媒体炒得火热的大事：对七个“千禧年数学难题”的每一个悬赏100万美元。其公告可在http：//www.claymath.org 网址上找到。关于该网页上这7个难题的初等描述的中译文，参见附录2。

上述种种重要数学问题给人的感觉较深奥，问题的实质大家也许不易领会，以下我们介绍几个易懂的现代数学之谜。

1. 名额分配之谜

数学不仅在自然科学、经济科学中的应用达到了“出神入化”的程度，在社会科学中数学方法也占有越来越重要的地位。现在我们以一个例子来说明政治学中数学的另一种应用，这就是著名的“名额分配问题”，它以应用浅显的数学知

识得出了深刻的政治结论而又一直未获根本解决而著称于世。

问题的由来

由美国宪法，美国国会分参众两院，参议院中各州有等额议席，而众议院“议员名额……将根据各州的人口比例分配……”，这便是由来。美国宪法1787年获得通过，1788年生效，但从1790年以来的200多年间，怎样操作才算公正合理地按这一原则分配好名额，一直是美国政治家，以及许多介入其中的科学家研究和争议的问题，人们创立了许多方法，但没有一种方法得到公认。

把这个问题数学化，即为：设美国一共有 s 个州，众议院一共设有 h 个议员席位。再设第 i 州有人口 P_i（$i=1, 2, \cdots, s$）。则全国总人口有 $P=P_1+P_2+\cdots+P_s$，第 i 州应有 $\frac{P_i}{P}\cdot h$ 个议员名额，记为 $q_i=\frac{P_i}{P}\cdot h$，称为第 i 州的“份额”，则显然有

$$q_1+q_2+\cdots+q_s=h$$

但是一般地，q_i 不是整数，而议员名额却必须是整数。怎么办？这正是名额分配问题的症结所在。

一个首先想到的方法可能就是“四舍五入”取 q_i 为整数，但此路不通：设 $h=5$，$s=3$，$q_1=1.5$，$q_2=1.6$，$q_3=1.9$，四舍五入，则每州应有2个议员名额，总共6个名额，但现在 $h=5$，问题出在哪儿？“四舍五入”。

那么用“去尾法”或“进一法”对 q_i 取整数，也不行：或者名额不够，或者名额剩余。

既然不能通过简单的对份额取整完成名额分配。问题就成为：在众议院席位数 h，州数 s，各州人口数 P_i（$i=1, 2, \cdots, s$）给定条件下，求出各州的份额 q_i（$i=1, 2, \cdots, s$）后，如何找出相应的一组整数 $a_1, a_2, \cdots, a_s$，使得

$$a_1+a_2\cdots+a_s=h$$

让第 i 州取得 a_i（$i=1, 2, \cdots, s$）个议员名额，并且“尽可能地”满足美国宪法所规定的“按人口比例分配”的原则？这就是“名额分配问题”。

显然稍加解释，小学生也可明白，但其求解却难倒了众多的政治家和数学家！

美国方法

法1：汉密尔顿方法：美国第一任总统乔治·华盛顿时代的财政部长亚历山大·汉密尔顿首先于1790年提出了解决名额分配问题的一种方法，1792年被美国国会通过，称为汉密尔顿方法。

法 2：杰斐逊方法：当时的国务卿后来当选为美国总统的杰斐逊与汉密尔顿政见不合，他说服华盛顿总统否决汉氏方法，而采用了杰斐逊的方法。

评注

汉密尔顿法不合理，以杰斐逊法为代表的各种方法也不尽如人意，怎么办呢？是否存在一种能使各方面都满意的名额分配方法呢？一直是一个未解之谜。

2. 不动点之谜

关键词：不动点

打个比喻吧：老和尚和小和尚同时分别从山顶和山下下山和爬山，如果两人的手表都对准了北京时间，途中两人相遇之处，两块手表当然显示出同一时刻。

把这一平凡的现象用数学语言表达，便成了一条重要的定理，叫做“连续函数的介值定理”。比如初冬天气，中午是5℃，夜里冷到 -6℃，这中间必然有一时刻是0℃。从介值定理能推出许多有趣而又有用的结论。不动点定理就是其中之一。



布劳威尔

一个实验：设想把一根橡皮条拉长到 1 米，两端固定在一根米尺的两端。米尺上是有刻度的：1 厘米，2 厘米，……于是，可以在橡皮条上也画上记号。橡皮条上的每个点对应于一个数 x，x 在 0 与 100 之间。

手一松，橡皮条自然会缩短。把缩短了的橡皮条仍然放在尺子上，再按照尺子上的刻度在每个点作记号 y，记缩短变换为 f，$y=f(x)$。

从拉长到缩短，橡皮条上的每个点的位置都经历了一次变化，一个运动，从 x 到 y。这个运动可能很不规则，很难掌握（这与橡皮条质量有关）。但是橡皮条上至少有一个点，它的位置没有变化！即 $x_0=f(x_0)$。

这就是荷兰数学家布劳威尔在 1912 年所证明的不动点定理的最简单情形。

如果对上述不动点定理直观说明，如图 8.1，其中画出了函数 $y=f(x)$ 及直线 $y=x$ 的图像。由于曲线 $y=f(x)$ 横贯正方形 $ABCD$，故直线 $y=x$ 必与曲线 $y=f(x)$ 相交，其交点的横、纵坐标必相等，即 $x=f(x)$。

考察图 8.2，即 $y=f(x)$ 曲线与直线 $y=x$ 在不同位置时的相交情形，其中 A、B 分别为 $f(x)$ 的最小、大值。图 8.2 (a)、(b) 反映了如果 $[A, B]$ 包含 $[a, b]$ 或 $[a, b]$ 包含 $[A, B]$，必然造成 $y=f(x)$ 与 $y=x$ 相交，即必有不动点，其他情形如图 8.2 (c)、(d) 可能没有不动点。那么“什么时候有不动点”似乎有答案了。值得指出的是，有不动点也不一定要求函数是连续

的。例如，可以证明，在 $[a, b]$ 上有定义的增函数 $f(x)$，如果定义域包含值域，则一定有不动点。

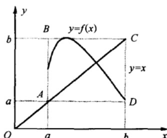


图 8.1

上述谈的是有不动点的充分条件。人们希望能找到不动点存在的充分又必要条件（即有了此条件必有不动点，反之，有不动点必满足此条件），但至今未获得。此外，如果有不动点时，有多少个不动点？这也是一个很难确定的问题。这些都等待人们进一步去解决。

数学之谜是迷人的，以上的猜想、难题、问题，不仅具有清晰性和易懂性，还有困难性，更具有意义重大的魅力。高斯说过：“若没有某种大胆放肆的猜想，一般不可能有知识的进展。”数学史告诉我们：它们曾给数学带来了无限的生机，而且还将继续起着心脏的作用。我们谁不想揭开未来数学的帷幕，探索和解决千古数学之谜，挖掘更多的数学宝藏呢？让我们牢记希尔伯特的名言：“我们必须知道，而且定会知道。”努力学习，不断地探索数学的未知世界，曙光就在前面。

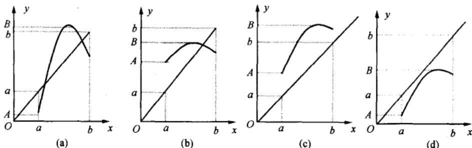


图 8.2

参 考 文 献

梁宗巨．1995．一万个世界之谜——数学分册．武汉：湖北少年儿童出版社

王则柯．2001．岭南笔记．福州：福建人民出版社

张奠宙．2002．20 世纪数学经纬．上海华东师范大学出版社

附 录 1

著名的“希尔伯特23个问题”

编号	问　　题	推动发展的领域	解决的情况
1	连续统假设	公理化集合论	1963年，Paul J.Cohen在下述意义下证明了第一个问题是不可解的。即连续统假设的真伪不可能在Zermelo-Fraenkel公理系统内判定
2	算术公理的相容性	数学基础	希尔伯特证明算术公理的相容性的设想，后来发展为系统的希尔伯特计划（“元数学”或“证明论”），但1931年哥德尔的“不完备定理”指出了用“元数学”证明算术公理的相容性之不可能。数学的相容性问题至今未解决
3	两等高等底的四面体体积之相等	几何基础	经过漫长的努力，这个问题于1952年由Gleason，Montqomery，Zipping等人最后解决，答案是肯定的
4	直线作为两点间最短距离问题	几何基础	在量子力学、热力学等领域，公理化的方法已获得很大成功，但一般地说，公理化的物理意味着什么，仍是需要探讨的问题。概率论的公理化已由A.H.Konmoropob等人建立
5	不要定义群的函数的可微性假设的李群概念	拓扑群论	1934年A.O.Temohm和Schneieder各自独立地解决了这问题的后半部分
6	物理公理的数学处理	数学物理	一般情况下的Riemann猜想至今仍是猜想。包括在第八问题中的哥德巴赫问题至今也未解决。中国数学家在这方面做了一系列出色的工作
7	某些数的无理性与超越性	超越数论	已由高木贞治（1921）和E.Artin（1927）解决
8	素数问题	数论	黎曼猜想至今未能解决，哥德巴赫猜想亦未最终解决，中国陈景润取得领先地位，目前孪生素数的最佳结果也属于陈景润
9	任意数域中最一般的互反律之证明	类域论	已由高木贞治（1921）和E.Artin（1927）解决

续表

编号	问　题	推动发展的领域	解决的情况
10	Diophantius 方程可解性的判别	不定分析	1970 年由苏、美数学家证明希尔伯特所期望的一般算法是不存在的
11	系数为任意代数数的二次型	二次型理论	H. Hasse(1929)和 C. L. Siegel(1936, 1951)在这问题上获得了重要的结果
12	Abel 域上 Kroneker 定理推广到任意代数有理域	复乘法理论	尚未解决
13	不可能用只有两个变数的函数解一般的七次方程	方程论与实函数论	连续函数情形于 1957 年由苏联数学家否定解决，如要求是解析函数，则问题仍未解决
14	证明某类完全函数系的有限性	代数不变式理论	1958 年永田雅宜给出了否定解决
15	Schubert 记数演算的严格基础	代数几何学	由于许多数学家的努力，Schubert 演算的基础的纯代数处理已有可能，但 Schubert 演处的合理性仍待解决。至于代数几何的基础，已由 B. L. Vander Waerden(1938 ~ 1940)与 A. Weil (1950)建立
16	工数曲线与曲面的拓扑	曲线与曲面的拓扑学、常微分方程的定性理论	问题的前半部分，近年来不断有重要结果
17	正定形式的平方表示式	域(实域)论	已由 Artin 于 1926 年解决
18	由全等多面体构造空间	结晶体群理论	部分解决
19	正则变问题的解是否一定解析	椭圆型偏微分方程理论	这个问题在某种意义上已获解决
20	一般边值问题	椭圆型偏微分方程理论	偏微分方程边值问题的研究正在蓬勃发展
21	具有给定单值群的线性偏微分方程的存在性	线性常微分方程大范围理论	已由希尔伯特本人(1905)年和 H. Rohrl(德，1957)解决
22	解析关系的单值化	Riemann 曲面体	一个变数的情形已由 P. Koebe(德，1907)解决
23	变分法的进一步发展	变分法	希尔伯特本人和许多数学家对变分法的发展做出了重要的贡献

附　录　2

七个“千禧年数学难题”

（网址为：http：//www.claymath.org）

1．P 问题对 NP 问题

在一个周六的晚上，你参加了一个盛大的晚会。由于感到局促不安，你想知道这一大厅中是否有你已经认识的人。主人向你提议说，你一定认识那位正在甜点盘附近角落的女士罗丝。不费一秒钟，你就能向那里扫视，并且发现主人是正确的。然而，如果没有这样的暗示，你就必须环顾整个大厅，一个个地审视每一个人，看是否有你认识的人。生成问题的一个解通常比验证一个给定解的时间花费要多得多。这是这种一般现象的一个例子。与此类似的是，如果某人告诉你，数 13 717 421 可以写成两个较小的数的乘积，你可能不知道是否应该相信他，但是如果他告诉你它可以因子分解为 3607 乘上 3803，那么你就可以很容易用一个袖珍计算器验证这是对的。不管我们编写程序是否灵巧，判定一个答案是可以很快利用内部知识来验证，还是若没有这样的提示则需要花费大量时间来求解，这被看做逻辑和计算机科学中最突出的问题之一。它是 Stephen Cook 于 1971 年陈述的。

2．Hodge 猜想

20 世纪的数学家发现了研究复杂对象的形状的强有力的办法。基本想法是问在怎样的程度上，我们可以把给定对象的形状通过把维数不断增加的简单几何营造块黏合在一起来形成。这种技巧如此有用，使得它可以用许多不同的方式来推广；最终导致一些强有力的工具，使数学家在对他们研究中所遇到的形形色色的对象进行分类时取得巨大的进展。不幸的是，在这一推广中，程序的几何出发点变得模糊起来。在某种意义下，必须加上某些没有任何几何解释的部件。Hodge 猜想断言，对于所谓射影代数簇这种特别完美的空间类型来说，称作 Hodge 闭链的部件实际上是称作代数闭链的几何部件的（有理线性）组合。

3．Poincare 猜想

如果我们伸缩围绕一个苹果表面的橡皮带，那么我们可以既不扯断它，也不让它离开表面，使它慢慢移动收缩为一个点。另一方面，如果我们想像同样的橡皮带以适当的方向被伸缩在一个轮胎面上，那么不扯断橡皮带或者轮胎面，是没有办法把它收缩到一点的。我们说，苹果表面是“单连通的”，而轮胎面不是。

大约在 100 年以前，Poincare 已经知道，二维球面本质上可由单连通性来刻画，他提出三维球面（四维空间中与原点有单位距离的点的全体）的对应问题。这个问题立即变得无比困难，从那时起，数学家们就在为此奋斗。

4. Riemann 假设

有些数具有不能表示为两个更小的数的乘积的特殊性质，例如，2，3，5，7，等等。这样的数称为素数；它们在纯数学及其应用中都起着重要作用。在所有自然数中，这种素数的分布并不遵循任何有规则的模式；然而，德国数学家 G.F.B.Riemann（1826～1866）观察到，素数的频率紧密相关于一个精心构造的所谓 Riemann-Zeta 函数 $\zeta(s)$ 的性态。著名的 Riemann 假设断言，方程 $\zeta(s)=0$ 的所有意义的解都在一条直线上。这点已经对于开始的 1 500 000 000 个解验证过。证明它对于每一个有意义的解都成立将为围绕素数分布的许多奥秘带来光明。

5. Yang-Mills 存在性和质量缺口

量子物理的定律是以经典力学的牛顿定律对宏观世界的方式对基本粒子世界成立的。大约半个世纪以前，Yang（杨振宁）和 Mills 发现，量子物理揭示了在基本粒子物理与几何对象的数学之间的令人注目的关系。基于 Yang-Mills 方程的预言已经在如下的全世界范围内的实验室中所履行的高能实验中得到证实：Brookhaven，Stanford，CERN（欧洲粒子物理研究所）和筑波。尽管如此，他们的既描述重粒子、又在数学上严格的方程没有已知的解。特别是，被大多数物理学家所确认、并且在他们的对于“夸克”的不可见性的解释中应用的“质量缺口”假设，从来没有得到一个数学上令人满意的证实。在这一问题上的进展需要在物理上和数学上两方面引进根本上的新观念。

6. Navier-Stokes 方程的存在性与光滑性

起伏的波浪跟随着我们正在湖中蜿蜒穿梭的小船，湍急的气流跟随着我们现代喷气式飞机的飞行。数学家和物理学家深信，无论是微风还是湍流，都可以通过理解 Navier-Stokes 方程的解，来对它们进行解释和预言。虽然这些方程是 19 世纪写下的，我们对它们的理解仍然较少。挑战在于对数学理论做出实质性的进展，使我们能解开隐藏在 Navier-Stokes 方程中的奥秘。

7. Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想

数学家总是被诸如 $x^2+y^2=z^2$ 那样的代数方程的所有整数解的刻画问题着迷。欧几里得曾经对这一方程给出完全的解答，但是对于更为复杂的方程，这就

变得极为困难。事实上，正如 Yu. V. Matiyasevich 指出，希尔伯特第 10 问题是不可解的，即不存在一般的方法来确定这要的方程是否有一个整数解。当解是一个 Abel 簇的点时，Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想认为，有理点的群的大小与一个有关的 Zeta 函数 ζ（s）在点 $s=1$ 附近的性态有关。特别是，这个有趣的猜想认为，如果 ζ（1）等于 0，那么存在无限多个有理点（解），相反，如果 ζ（1）不等于 0，那么只存在有限多个这样的点。

9　数学建模与数学建模竞赛漫谈

一、假想一个大学毕业生所遇之问题

试想现在你毕业了，走上了工作岗位，过上了独立自然生活。

在工作上你将面临：如何完成定额？如何改进工艺等。如何作最优调度来提高产量、利润等。

在生活上你将面临：经济生活中的财务、股票、存款、投资决策等。俗话说：不算计吃个死利息，巧安排，才有收益，即所谓投资理财，还有博彩技术等。

娱乐生活中的各种竞技方法、排名法。

文化生活中的衣食住行的科学、营养食谱配方。

物质生活中的购物、家庭装潢，等等。

例如三个具体问题：

(1) 波利亚果园问题

在一个圆形的果园中，均匀地种植果树，问果树的树干长到多粗，才能完全遮住果园的中心的视线。

(2) 雨中行

下着连绵的雨，设雨丝是平行的。一个人必须在雨中从 A 走(或跑)到 B。他没有带伞，因而要寻求前进的速度(u)，使得落在身上的总雨量最少。

(3) 洗衣服的数学

现在衣物已打好了肥皂，揉搓得很充分了，再拧一拧。当然不可能完全把水拧干，设衣服上还残留含有污物的水 1 公斤，用 20 公斤清水来漂洗，怎样才能漂得更干净？

以上种种均涉及定量分析与设计即数学建模技术。

二、引入四个话题

话题 1　我们在学校里学的东西特别是数学、计算机等有何用？

这里的关键问题是怎么用？这种介于数学(数学与应用数学)、计算机(数学含量高如物理等)与实际问题之间的一种技术是很重要的，那就是数学建模、数值分析。

数学应用的钥匙是数学建模，今天在技术科学中最有用的数学领域是数值分

析和数学建模(美国科学工程和公共事务政策委员会报告《美国数学的现在和未来》(1986年))。

接下来的问题是：

话题2 何为数学模型、数学建模以及数学建模竞赛?

话题3 MCM与我们的关系多大?(有何益处?)

话题4 如何参与数学建模竞赛及其活动呢?

三、话题1漫谈

几个典型的例子

例1 冯·诺伊曼型计算机

目前世界上运行的计算机，尽管种类繁多，但按其数据加工方式可以分为两大类：串行的计算机与并行的计算机。



冯·诺伊曼

所谓串行计算机也就是冯·诺伊曼型计算机。就其整机原理和设计思想来说，现在的计算机是根据美国数学家冯·诺伊曼提出(创建的数学模型)的原理设计并制造出来的。比如：1944年世界上出现了第一台电子数字计算机"埃尼阿克"(ENIAC)。它的基本原理是：ENIAC的操作对象是以二进制代码形式表示的数据和指令，把它们一起存放在同一存储器中，同时使用了少量的寄存器用于存放当前执行的指令和数据，计算机不断地顺序完成存取和执行指令的重复工作。现在使用中的大多数计算机都是按此(冯·诺伊曼的基本结构)设计的。

例2 北大方正集团公司

方正、华光激光照排系统的发明人王选为数学出身，人称"中国汉字激光照排之父"，主持研制了华光、方正汉字激光照排系统，"高倍率信息压缩技术和全电子照排方案"。北大54级数学系高材生，三年级开始选择专业为计算数学，对于其中研制的最大技术难题：汉字的存储量问题。他研制出了一套高达1∶500的高倍率汉字型信息压缩方案，并推导出一套逆推公式，用一连串逼近直线临近点，准确而迅速的复原。公司总裁办公室主任张炳贤先生曾说："培养跨世纪的人才，数学要起很大作用"，"方正集团公司的照排系统就是数学应用的典型例子;主要产品来源于数学的应用。王选教授应用压缩技术这一数学方法解决了计算机实现中的难题"。



王选

王选统计：世界上获国际计算机最高奖——图灵奖的20多人中，几乎都是数学出身的，至于国内计算机界，1988年曾荣获国家科委授予的"国家级有突出贡

献的中青年专家”称号的，绝大多数都是出于北京大学数学系。

例3 比尔·盖茨与数学建模

作为世界首富、软件之王的比尔·盖茨，早在湖滨中学读书时，就对数学产生了浓厚的兴趣，并成绩优异，按比尔的回忆：“我在读8年级时，其他学科都考得不尽理想，但我的数学却始终没有考败过。”他的中学数学老师评价说：“他能用一种最简易的方法解决某个代数的或计算机问题……，他甚至可以和工作过多年的那些优秀数学家媲美。”在进了哈佛大学之后，他仍然对数学情有独钟，并曾研究数学难题：“我们那个地方的厨师做事粗心大意。他做煎饼时做出的煎饼大的大，小的小，外形各不一样。因此，我给顾客送去煎饼时，总爱重新摆放一下，从盘子上面抓住几个煎饼，把它们翻到下面去，不停地这样做(翻动的个数是变化的)，翻动的次数根据需要进行，其结果是最小的依次去最上面，最大的则去最下面。现在的问题是：如果有 N 个煎饼，我需要至少翻动多少次才能重新安排好煎饼？”



比尔·盖茨

这个问题看起来非常简易，真正动手解决却非常之难。比尔解决了它，论文于1979年发表在《非线性数学》杂志上。比尔大学期间在数学与计算机方向上一直在抉择，在分析发现自己不是哈佛里最好的数学尖子，但是计算机学科方面无人能与之匹敌后，才定下了计算机方向。甚至在多年后他回忆说他险些成了数学家。值得一提的是比尔的数学建模经验是有的，如在湖滨中学时就搞过课程设计、交通流量的研究、制作烹调书，特别是建模后成功地编制了一套管理课程安排计划的计算机程序和一套学生注册的计算机管理程序。由此可见其卓越的建模能力之一斑。



比尔·盖茨演讲

例4 世界上流行这样的说法：“未来高科技的核心是数学技术”

(1) 高清晰度电视的开发经历了十多年的激烈竞争，美国的“数字式”方案击败了最先起步的日本“模拟式”设计。早在太空开发竞争初期，美国实施“阿波罗登月计划”时，就已认识到，如果没有信息的数字化、纠错编码和数字滤波等一整套数学通讯技术(与傅里叶级数和小波分析有关)，由于太空的过强干扰，任何有用的信息都无法收到，更不用说精密的控制，这套技



比尔·盖茨在出席会议

术在开发高清晰度电视的竞争中使美国获胜。

——《人民日报》1994.2.24 第6版

(2) 波音公司推出“777型”新一代飞机。这被称为“百分之百数字化设计的飞机”，由于在设计和试验过程中全面采用了数学技术，高性能新机种的研究周期从10年缩短到3年多。

——《南方周末》1994.9.9 第6版

(3) 美国总结海湾战争经验，强调“未来的战场是数字化的战场”。正是这套技术在20年后，使美国在海湾战争中把对方搞得既聋又哑，自己的信息却畅通无阻。

——《解放军报》多次报道、引述、讨论

(4) 诺贝尔经济学奖开设以来，用数学方法进行研究的学者获奖比例极高。如1994、1995、1997年度的诺贝尔经济学奖都授予了数学家。

以上几条新闻显示了数学技术(以数学建模为中心)在各个方面发展中所起重要作用。可以说在许多重大高科技行动中，从事先设计、制订方案到信息传递和指挥控制，处处倚重于数学技术。可以毫不夸张地说：数学起着“智囊”和“参谋指挥中心”的作用。

近几年的美国数学界总结报告指出“今天，在技术(科学)中最有用的数学研究领域是数值分析和数学建模”。

少数有远见的科学家就曾深刻地指出：“太少的人认识到当今如此受到称颂的”高技术“本质上是一种数学技术”。

未来世界的工作者，人人都有可能面对着电脑的屏幕和电脑遥控(智能机器人、电饭煲、全自动洗衣机、遥控电视等)，数学技术将是一种应用最广泛、最直接、最及时、最富创造精神的实用技术。

正因为如此，1992年5月，国际联盟现任主席里昂斯(J.L.Lions)以联盟名义，宣告2000年为世界数学年(WMY2000)。

四、话题2漫谈

(一) 传统的数学教育

(1) 从内容上分析(内容陈旧与实际、时代落伍)

数学是研究现实世界中的空间形式与数量关系的一门科学，是形与数的拓广(计算与应用的迅速发展的“异体受精”)。

数学是模式和秩序的科学(模式的科学即寻求数、空间、科学、计算机以及想像中的模式)。

对象：数、机会、算法和变化各种模式

值得注意的是现代数学科学包括

* * 核心数学(纯粹数学)
* △应用数学
* △统计学，计算数学
* △高度数学化的领域，如计算机科学，理论物理，理论经济学

其中△内容学得很少。

正如现代数学家 L.A 斯蒂恩(美)所说："读完高中数学课程的人，大约达到 17 世纪中叶的数学水平；而大学一年级的微积分，也不过使一些学生的数学水平达到 18 世纪而已。……现在的美国人中，能学到一点超过 18 世纪数学知识的还不到 1%。"

在中国的比例可能还要小，对于应用数学以及 19 世纪以后的数学知识，很多人甚至大学生基本上是一片空白(至少为严重缺乏)。

大学数学教育应包括三方面内容：即基本知识的传授，进一步自学能力的培养，应用数学的知识去解决问题的能力的培养。

应该说我们的教学在传授知识方面是比较成功的，但在培养学生自学和应用能力上是不够的。

(2) 从教学方式上分析(一言堂、满堂灌、被动学习)

"教师讲，学生听(记笔记)，做习题，改习题，考试"的方式单一，学生始终被动。

(3) 从认识论上分析(缺实用的两头)

$\text{实践}\xrightarrow[\text{①}]{}\text{理论}\xrightarrow[\text{②}]{}\text{实践}$

①建立数学模型，②检验（相符程度、好的程度）

大学数学学习的主要是中间部分即理论，如高等数学(微积分)、线性代数、概率与统计、复变函数等，缺实用的两头。

(4) 从技术手段上分析(对数学软件包一无所知)

目前我们的大学数学教学中很少、甚至根本不用计算机，其实在数学教学中如何使用技术手段(如计算机、相应的数学软件包)，这是一个不可回避的问题。也是使数学成为商品的关键。

(5) 从比赛上分析(传统的比赛是远远不够的)

作业、测验、考试、大学生数学竞赛、奥林匹克数学竞赛(IMO)只是测试学生的数学能力，这是远远不够的。因为它与科研以及未来的实际研究情况相距甚远。而数学建模竞赛(MCM)却能部分做到这点，这正是原来的大学生们四年大学生涯里不可能碰到的，近年来 MCM 已成为国际大学生数学教育的真正竞赛热点。

我国有关专家呼吁："目前我国理工科大学的数学教育存在着与当代科学技

术的发展不相适应的矛盾，其中工科类院校尤为突出”，“计算机的影响，理应不断反映到数学教育中来”。

(二) 数学建模竞赛是怎么回事?

1. 史话

1985年在美国出现了一年一度的大学生数学建模竞赛(Mathematical Contest in Modeling, MCM)，这之前美国只有一种大学生数学竞赛(即普特南数学竞赛)，由于竞赛不用计算机、缺乏应用内容、强调纯数学、要求参赛队员的数学素质太高，参加人数也少。

自1983年以来便有人提出了应该有一个普特南应用数学竞赛，经过专家们论证、讨论、争取资助的过程，终于在1985年开始了第一届MCM。

中国部分学院自1989年起开始参加美国的MCM。比如：

(1) 1989年我国有3所院校4个队参加。

(2) 1994年我国有33所院校约84个队参赛，而1994年A-MCM有10个国家和地区，198所学校的315个队，中方队已占到25%。并有16个队获一等奖。

(3) 1995年我国有35所院校约84个队参赛，中方队已占到1/4。

(4) 1996年第12届美国MCM，我国有39所院校约115个队参赛。其中有9个队获A题一等奖，中国科技大学、复旦大学获B题的特等奖，6个队获一等奖。

中国在1990年时上海、西安就有地区的数学建模竞赛，1992年起开始正式创办中国的MCM(由国家教委高教司和中国工业与应用数学学会共同主办的面向全国大学生的群众性科技活动。目的在于激励学生学习数学的积极性，提高学生建立数学模型和运用计算机技术解决实际问题的综合能力，鼓励学生踊跃参加课外科技活动，开拓知识面、培养创造精神)。

首届在1992年，有80多所院校的近300支队伍参赛，规模之大，已超过同年的美国MCM的人数。

1994年MCM，全国分18个赛区，196所院校，共876个队参赛。

1995年MCM，全国已有22个赛区，来自24个省(市、自治区)、259所院校的队参赛。(全国一等奖35名，二等奖75名)

1996年，全国有23个赛区，来自24个省(市、自治区)、337所院校的1683个队参加了比赛，评出全国一等奖48名，二等奖109名。

1997年共1874个队，373所学校，一等60名，二等129名。

1998年共2103个队，400所学校，一等79名，二等153名。

1999年共2657个队，460所学校。

2000 年共 3210 个队，517 所学校。

2001 年共 3861 个队(其中大专组 780 队)，529 所学校。(27 个省、市、自治区及香港)

2002 年共 4448 个队(其中大专组 914 队)，572 所学校。(30 个省、市、自治区及香港)

目前 MCM 已成为一项中国大学生喜爱的智力活动。不过对于中国一届近 200 万左右人的大学生而言，比例还是太小了。

2. 数学模型，数学建模

尽管过去很长时间这两个术语用得很少，但它们并不是什么新东西。可以说自从数学诞生的那时起，它们也随之应运而生。当用数学去解决实际问题就一定要用数学的语言、方法去近似地刻画该实际问题。其中这种刻画的数学表述即为数学模型。如欧氏几何丈量土地(埃及)、微积分(切线斜率、速度→导数；功、面积→积分)其过程即为数学建模。

通俗地说：模型即指一种模仿物，比如造飞机(外现模型或航模)。数学模型恰是客观实际的定量模拟"模仿物"(在某些方面)。

(1) 模型的分类

模型是对实际现象某一特征的描述。如果按表述给定问题的真实程度，可以把模型划分为以下三大类(模型的种类)：

1) 比例模型(scale model)，这是实际现象的小规模的重现，也叫做图像模型(iconic model)。例如，对作用在飞行中的物体上的气动力做实验及试验室气流动的风洞。(注：中国科技大学的火灾试验室里的风洞、小型仿制民用房子等)，研究船的特性用的水槽，为了获得大型工业装置的设计数据而制作的试验装置等。为使现象的变化速度变慢以便于观察用的高速影片等也属于这类模型。

2) 模拟模型(analogue model)，如可以将流体的流动及热的流动代之以金属薄膜中的电流，或者将机械系统用等价的电路代替来进行模拟试验。前提是它们的基本方程有相同形式。

3) 符号模型(symbolic model)，这是将现象的特性用数学式子表示的一种模型。也包含不一定是用公式表示的，而是用符号、用逻辑图形(图形、表格)表示的，以及用计算机程序(软件)表现的模型。文学、艺术、音乐等也是符号模型。

(2) 数学模型的分类

数学模型是用数学式子等数学形式表示现象的特征。考虑到实际现象的千变万化、纷纭复杂以及观察方法的选择数学模型有以下几种分类：

1) 按照变量的情况：

a. 离散与连续；

b. 确定、随机、模糊、突变；

c. 线性与非线性；

d. 单变量、多变量。

2) 按照时间变化的影响：

a. 静态、动态；

b. 参数定常、参数时变。

3) 按照精密程度：

集中参数，分布参数。

4) 按照研究方法和对象的数学特征：

初等，优化，逻辑，稳定性，扩散，统计，模拟等。

5) 按照研究对象的实际领域：

人口模型，交通模型，生态模型，生理模型，经济模型，社会模型，…

6) 按照对研究对象的了解程度：(对象——一只箱子里的机关，通过建模揭示奥妙)

a. 白箱，如对力学、电话理论等机制清楚的现象，研究优化设计和控制等方面；

b. 灰箱，如对化工、水文、地质、气象、交通、经济等机理尚不完全清楚的现象研究其建模；

c. 黑箱，如对生态、生理、医学、社会等机理(数量关系)更不清楚的现象研究其建模。

什么是数学建模呢？如果一定要下一个定义的话，可以说它是一种数学技术，一种数学的思考方法，是“对实际的现象通过心智活动构造出能抓住其重要且有用的特征的表示，常常是形象化的或符号的数学表示”。

从科学、工程、经济、管理等角度看数学建模就是用数学的语言和方法，通过抽象、简化建立能近似刻画并“解决”实际问题的一种强有力的数学工具。

modelling 一词有“塑造艺术”的意思，因而从不同的侧面、角度去考察问题就会有不尽相同的数学模型，而数学模型的创造又带有一定的艺术特点，但最重要的特点是要接受实践的检验，多次修改模型渐趋完善的过程。

数学建模的流程图如图 9.1 所示。

数学建模活动就是针对①～③3 个步骤，数学建模学即研究①～③的规律和方法，①、③也是 MCM 获奖的关键。这三步曲(应用数学家林家翘提出的)，在实际建模时，是一个不断循环的，不断修改重建的过程。

华罗庚在《运筹学平话》中提出，加一步 ⓪为调查研究，这时建模步骤成为了四步曲。后又经研究，合并⓪、①于①，又成为三步曲，所谓“三、四、三”。他还将建模与算法合并，提出了“四、五、四”。

参与数学建模首先要“改造思想”，因为数学建模可以说是面向对象(实际问

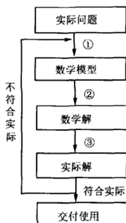


图 9.1

注:①建模;②用各种方法求解;③讨论检验

题)的数学设计。

3. 大学生数学建模竞赛

MCM 是促进数学应用人才培养的新型竞赛，是一新生事物，它是大学校园里操练学生解决实际问题的有效途径。

具体来说，它的特点如表 9.1 所示

表 9.1

	纯数学竞赛	数学建模竞赛
宗旨	掌握数学理论，解决理论问题的技巧技能	利用数学及各科知识、计算机等技术手段解决实际问题的综合能力
内容	数学理论题	实际问题，涉及面广，不固定范围和领域
形式	闭卷，个人独立解题。IMO 中 3 题/(3 小时×1 人)卷子，一份答卷/人，同平日做习题	开卷，三人团体合作，可以使用外部资源(非生命)。MCM 中 1 题/3 天×3 人卷子，论文(≥10000 字)，同科研论文
判卷	答案的对错是绝对标准，精确评分	允许不同答案，着重建模思想及实际眼光，评出等级

(1) MCM 的评比标准与参赛学生要求

按竞赛章程规定：“以假设合理性、建模的创造性、结果的正确性和文字表述的清晰程度为主要标准。”

MCM 着重的是三个步骤：

I. 建立模型(方法是否简单且有创新)→队员不同专业

II. 数学解答(正确、准确度高)→数学功底好

III. 模型的检验(符合实际吗?)→计算机能力等

评出等级:

A-MCM 有特等、一等、二等、成功参赛奖。

C-MCM 有全国一等、全国二等和赛区一等、二等、三等、成功参赛奖。

总之，MCM 赛的是综合能力，又是新形式的，故数学专业或重点大学成绩未必好，而一些普通高校可能更出色，如 1995 年的南京空军气象学院，安徽机电学院。

(2) 答卷为一篇完整的论文(同学术论文、发表文章)

(3) 比赛时间、指导教师、学生任务

比赛时间:

A-MCM　每年 2 月，每个参赛队(3 人)有一名指导教师，负责

C-MCM　每年 9 月 20 号左右，比赛前对队员进行训练和战术指导，并接受赛题。然后即由学生自行参赛。(学生需在 3 天内完成打印论文，于第四天上午 7:30时前寄出。)

(4) 赛题

本科题目每届两个候选题——A 题(连续)、B 题(离散)，大专每届两个候选题——C 题、D 题，每队只需选作一题。

题目一般是由专家、数学家根据实际研究课题简化、抽象提出的，一般是没有固定范围的实际问题，可谓五花八门。

1) A-MCM 赛题一览

1985 年　A：动物保护　B：战略物资的管理

1986 年　A：水道测量数据　B：应急设施的选址

1987 年　A：盐的储存　B：停车场画线

1988 年　A：毒品走私船的位置　B：铁路平板车装货

1989 年　A：昆虫分类　B：飞机排队(机场管理)

1990 年　A：药物扩散的规律　B：扫雪问题

1991 年　A：水塔的水流量　B：通讯网络

1992 年　A：机场雷达功率　B：供电系统的修复

1993 年　A：堆肥的制作(餐厅剩菜)　B：运煤车辆的安排

1994 年　A：混凝土地板的温度变化　B：计算机网络文件传输的时间

1995 年　A：螺旋线与平面的交点　B：大学教员的工资方案

1996 年　A：海洋中探测移动潜艇的方法　B：MCM 评阅答卷的方法

1997 年　A：疾走龙属问题　B：为取得富有成果的讨论怎样搭配与会成员

1998 年 A：磁共振成像扫描仪 B：成绩给分的通胀
1999 年 A：强烈的碰撞 B：非法集会 C：大地污染(ICM)
2000 年 A：空间交通管制 B：无线电信道分配
C：大象群落的兴衰(ICM)
2001 年 A：选择自行车车轮 B：逃避飓风怒吼
C：我们的水系——不确定的前景
2002 年 A：风和喷水池 B：航空公司超员订票
C：佛罗里达灌木蜥蜴——如果我们过分扫荡自己的土地，将会失去各种各样的蜥蜴

2) C-MCM 赛题一览

1992 年 A：施肥方案 B：蛋白质的分解
1993 年 A：卫星通讯的频率设计 B：足球比赛排名
1994 年 A：公路线路的设计 B：锁具装箱问题
1995 年 A：一个飞行管理问题 B：天车调度
1996 年 A：最优捕捞策略 B：节水洗衣机的设计
1997 年 A：零件的参数设计 B：截断切割
1998 年 A：投资的风险和收益 B：灾情巡视路线
1999 年 A：自动化车库管理 B：钻井布局
C：煤矸石堆积 D：钻井布局
2000 年 A：DNA 序列分类 B：钢管订购和运输
C：飞越北极 D：空洞探测
2001 年(夏令营) A：三峡工程陡高边坡开挖优化设计
B：城市交通拥阻的分析与治理 C：乳房癌的诊断
2001 年 A：血管的三维重建 B：公交车的调度
C：基金使用计划 D：公交车的调度
2002 年 A：车灯线光源的优化设计 B：彩票中的数学
C：车灯线光源的计算 D：赛程安排

五、话题 3 漫谈

学生三人三天守在实验室里的计算机旁创作，非常累，像着了魔似的、压力大，还要熬几夜，有何好处？

总起来说：数学建模技术是能在广泛领域使用的一种工具或辅助工具，不论你从事何种工作都会或多或少有意或无意的直接或间接的使用它。因此了解和掌握数学建模技术和基本知识，学会运用一些基本的建模软件，就成为一项全面提

高我国大学生素质的一个重要课题和内容。其根本目的和目标是使中国建设得更强大，MCM 是为了这种目标所采取的一种做法和手段，MCM 的意义也正在这里。MCM 竞赛的好坏，收效关键是看对于推动普及、推动应用的效果如何？

- 专家们的看法：

1）MCM 与成才的五要素（即数理基础、专业好、外语、坚强的意志、交流合作能力）有密切联系，对培养未来的应用人才大大有利。

2）MCM 反映时代气息（当今时代特点：信息、计算机革命），特别是今天的实际要求大学生，一是要会用电脑，二是能理解电脑给出的答案。

3）MCM 活动培养和提高了大学生的以下诸能力：I."双向"翻译能力，II. 用数学进行分析解决问题的能力，III. 联想力，洞察力。

- 教师们的看法：

指导教师觉得在他班上受过 MCM 训练的学生在反应和洞察力方面有明显的不同，这些学生以后的发展是无限量的。

指导教师认为赛前培训是关键，是真正培养优秀生的主要阶段。MCM 提供了大学生这样一个难得的机会（科研、显示实力、自由发挥等），故"参与"本身过程就是收获（何况是全国赛）。

当然 MCM 是竞赛，参加竞赛的选手希望得奖、获胜。学校也希望自己的队员能为学校争取荣誉。

胜了，兴高采烈，除颁发获奖证书，也有少量的物质奖（主办单位颁发），优秀论文能发表，竞赛成绩记入学生档案，对成绩优秀者，各院校在评优、奖学金及报考（或免试直升）研究生时有适当的考虑。也听说过有部分学生曾以此在找工作和毕业分配中起过不小的作用。

败了，灰心丧气，也是人之常情，但赛前的培训、参赛以及参与过程本身即是收获。（最终都是成功参赛）

- MCM 参赛者们谈收获的心声："一次参赛终身受益。"

下面我引用中国科技大学曾参加过 MCM，而现在国内外不同的岗位和领域学习或工作的一些同学所谈的切身体会。

这一工作是中国科技大学数学系教授李尚志 1994 年利用出国进行学术访问的机会，组织曾参加过美国或国内大学生数学建模竞赛现在正在美国深造的学生，通过 e-mail（电子邮件）进行的"MCM 讨论会"。

学生徐国洪说：你或许对以上这些不感兴趣，但我要说的是：你教了我怎样从事科学研究，而我现在每天都在使用着你教的这些方法。

学生王斌说：参加 MCM 以来，一年多过去了，在那些难忘的日子里，我学到了许多书本上没有的东西，别人不会理解这对我来说是多么重要！

学生吴江说：参加数学模型赛的感触还有许多许多，在这里就不一一列举

了，不过其中的酸、甜、苦、辣、喜、怒、哀、乐可用这样一句话来概括：在追逐一个事物的过程中所获得的乐趣远比得到事物本身的乐趣大得多！

他们没有一个人提到当年的胜败，但都谈起了自己的收获，而且这些收获现在还在不断地起作用(可以说终身受益)。除了他们说出来的收获以外，仅从他们现在的见解的成熟和深刻性来看，不也透出了 MCM 在他们的人生道路上打下了不可磨灭的印记吗？

这些同学的体会充分说明了 MCM 对培养富有竞争力的跨世纪人才所起的作用。

相信他们的体会对大学生来说是富有启发性的。

六、话题 4 漫谈

数学界流传这样一句至理名言：“学数学的最好方式是做数学。”可以类比地说：学习数学建模的最好方式是动手动脑做数学建模。而 MCM 活动如：数学建模协会活动、数学知识应用竞赛、MCM 及其集训、数学建模选修课、数学实验室等正是这样一种引导大学生“参与”的活动，重在“参与”。

如何参与呢？形式是很多的。

1) 自学，步骤为：

① 阅读了解别人的数学建模文章；

② 试着选题做做；

③ 根据需要补充一些知识(应用数学、计算机等)；

④ 按 MCM 要求做模拟。

2) 参加“数学建模”选修课，步骤是：

① 报名；

② 初选上课；

③ 在教师的指导下“参与”；

④ 力争入选 MCM；

⑤ 参加 MCM，体验全过程。

3) 参加大学生数学建模竞赛集训、竞赛或参加大学生数学建模协会活动，参加院校的数学建模竞赛和数学知识应用竞赛。

数学建模诗选摘：

七 律

——咏数学模型

李尚志

数学精微何处寻，
天高地广有模型。 (1996 年改为：纷纭世界有模型。)
描摹万象得神韵，
识破玄机算古今。
岂是空文无实效，
能生妙策济苍生。
八千子弟皆才俊， (1996 年改为：经天纬地显身手，)
七十二行任纵横。

参 考 文 献

姜启源 .1987. 数学模型 . 北京：高等教育出版社
李大潜 .2001. 中国大学生数学建模竞赛(第二版). 北京：高等教育出版社
李尚志 .1996. 数学建模竞赛教程 . 南京：江苏教育出版社
刘来福，曾文艺 .1997. 数学模型与数学建模 . 北京：北京师范大学出版社
王庚 .2003. 实用计算机数学建模 . 修订本 . 合肥：安徽大学出版社

10　数学与艺术

看到这个标题，读者可能会感到陌生和惊奇：数学是一门非常抽象的科学，怎么跟艺术(即美)联系起来呢？应该说产生这种疑问是不无缘由的。大凡人们在谈论那秀丽壮观的自然美景和优美动人的艺术时，常常离不开给人以享受的自然美和艺术美。而数学由于它冷冰冰的数字和奇特的符号语言，使不少学生感到枯燥乏味甚至望而却步，哪来美的享受！数百年来不是流传着“只有美的艺术，没有美的科学”的观念吗？我们不禁要问：数学真的与艺术即美无缘吗？

那也就是要回答如下五个问题：

问题1　数学是什么？

问题2　艺术是什么？

问题3　数学中存在美吗？

问题4　数学美是什么？

问题5　数学与艺术共通之处何在？有数学艺术品吗？

以下我们用大白话来一一解答上述问题。

一、数学是什么？艺术是什么？

翻开辞典可知：数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的，简单的说是研究数和形的科学。艺术则是文学、美术、雕塑、戏剧、电影、曲艺、音乐、舞蹈等的总称。

上述数学的定义是《中国大百科全书——数学卷》开宗明义的定义，这是一个权威的论断，脱胎于马克思和恩格斯关于数学的概括。

其实数学是什么好像很清楚，又觉得不大清楚，它本质上是一个数学世界观的问题，它有诸多层面，它有时像一门纯粹科学，有时像一门应用科学，有时又是决策与行动的工具，有时作为现代教育最重要的学科之一，下面几部分的讨论将指出有时它还像一门艺术。

二、数学中存在美吗？

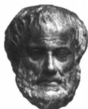
回答是肯定的，举例即可！

例1　六七千年以前的新石器时期，陶器上绘制了包括方形、菱形和圆形等

图案的纹饰，并且注意到图形的对称和圆弧的等分。

我国西安半坡文化彩陶上的花纹和图案，不仅有对自然物形状的简单、直接的模拟，而且有大量的比自然形态更合乎数学规律的物体。

例 2 公元前 500 年左右，古希腊的毕达哥拉斯及其学派认为数是世界的本源，是构成宇宙万物的最基本的元素，合乎数的比例与和谐就是美的本质，“整个宇宙是数和数的关系和谐系统。”他们还具体地提出各种美的比例，如和谐比例(3:4:6)、音乐比例($A:(A+B)/2=2AB/(A+B):B$)、完全比例($(A+B)/2:\sqrt{AB}=\sqrt{AB}:2AB/(A+B)$)和黄金比例($AC:AB=CB:AC$，$C$ 为线段 AB 的分点)；还指出了许多最美的数与形，如完全数(若正整数 A 的小于 A 的正因数之和恰等于 A，则称 A 是完全数，毕达哥拉斯发现 6，28 是两个完全数，即 $6=1+2+3$，$28=14+7+4+2+1$)，亲和数(若正数 A 的小于 A 的因数之和等于正整数 B，同时 B 的小于 B 的因数之和等于 A，则称 A，B 是一对亲和数，毕氏找到 220 与 284 即是)，以及“一切立体图形中最美的是球形，一切平面图形中最美的是圆形”。


亚里士多德

亚里士多德认为“秩序和对称是美的重要因素，而这两者都能在数学里找到。”

普洛克拉斯言简意赅地指出：“哪里有数，哪里就有美。”

例 3 天文学家开普勒提出几何学中有两件瑰宝，即毕达哥拉斯定理(即勾股定理)和黄金分割律。

关于勾股定理我们介绍公元 3 世纪三国时代的中国数学家刘徽给出的无字证明，即“出入相补”法。

如图 10.1 所示，ABC 为勾股形，以勾为边的正方形为朱方，以股为边的正方形为青方。按图中的标识进行出入相补(“$-$”号表示移出，“$+$”号表示补入)后拼成弦方，依面积关系显然有关系式

$$弦方=朱方+青方$$

即

$$弦^2=勾^2+股^2$$

欣赏与玩味：这一证明利用平面图形的面积，巧妙地加以移、合、拼、补之后，甚至无须代数运算，而勾、股、弦之间的关系便可一目了然(图 10.1)。除了简明外，其中依据的几何基本原理“出入相补原理”达到了几何图形的直观性与逻辑推理的严谨性的高度统一，信息量是相当大的。1972 年发射的星际飞船“先锋 10 号”，已经给“外星人”送去了一块由美国科学家设计的信息板，华罗庚教授提出，最好是送几张表示数和形的图去，其中就可送去刘徽证明勾股定理的“出入相补图”。如果外星球真有高级生物，他们接收后，很快能理解给他们送图的“邻居”必是具有高度智慧和文明的友邻。

关于第二个宝藏黄金分割律，从古到今许多人推崇备至，其中包括文艺复兴

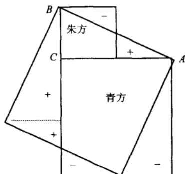
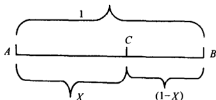


图 10.1

时期的科学和艺术大师达·芬奇。16 世纪意大利的帕乔里甚至把黄金分割称为“神赐的比例”。公元前 4 世纪，有位叫攸多克斯的古希腊数学家，曾经研究这样一个问题：“如何在线段 AB 上选一点 C，使得 $AB:AC=AC:CB$?”这就是赫赫有名的黄金分割。

C 点应该在什么地方呢？不妨假设线段 AB 的长度是 1，C 点到 A 点的长度是 X，则 C 点到 B 点的长度是 $1-X$，于是 $1:X=X:(1-X)$，解得 $X=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，舍去负值，得 $X=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$。



“0.618”是惟一满足黄金分割的点，叫做黄金分割点。冠以“黄金”二字，足见人们对它的珍视。艺术家们发现，遵循黄金分割来设计人体形象。人体就会呈现最优美的身段，女神维纳斯的雕像上就有多个黄金律，如肚脐以下的长度与身高的比值，而一般人这个比值大约只有 0.58。难怪芭蕾舞演员在翩翩起舞时，要不时地踮起脚尖呢。音乐家们发现，将手指放在琴弦的黄金分割点处，乐声就越发洪亮，音色就更加和谐，建筑师们发现，遵循黄金分割律去设计殿堂，殿堂就更加雄伟庄重。

100 多年前，一位心理学家做了个有趣的实验。他精心设计出许多不同的矩形，然后邀请许多朋友来参观，请他们各自选择一个自认为最美的矩形。结果，592 位来宾选出了 4 个矩形。

心理学家动手测量出它们的边长，发现它们边长的比值，又都出乎意料地接近于0.618。

例4 圆

所谓圆是什么呢？

在数学家眼里，数学上的圆就是最简单的曲线，该曲线上的无数点与一已知点的距离相等；圆是闭合的曲线，它到外都是凸的。



欧拉

数学家头脑里的圆就是函数 $y=\pm\sqrt{1-x^2}\quad(|x|\leqslant 1)$ 的几何图形，说实话，这种纯粹数学意义上的几何图形不存在于自然界，几何上的圆，乃是人类精神最抽象、最理想和最完美的产品。

几何上的圆，是自然界中一切圆中最完美的圆。因为从各个方向上看都是对称的，让人感到十分舒适，具有完满的对称美，然而这仅是圆的外在美，它内涵的意蕴更加动人心扉。还在遥远的古代，火红的太阳，皎洁的明月，清晨的露珠以至动物的眼睛，都给人以圆的启示。今天人们的生活更是和圆结下了不解之缘。世界上的圆无穷无尽，有大有小，但惟有数学的圆最标准、最纯粹、最美，因为它的周长与直径之比精确地等于一个无理数 π，因此，严格地说它是画不出来的，画得出来的圆只是它的某种程度的近似。$C=\pi D$，这是一个多么简洁的公式，其所反映的又是一种多么奇妙而和谐的关系！难怪有的学者称它为“宇宙间的第一等好诗”。圆还有许许多多优美的性质和应用，如在单位圆上定义三角函数和圆盘代数（定义在单位圆周和单位圆盘上的复连续函数全体组成的代数），构造罗巴切夫斯基几何模型，等等，数学的圆堪称数学家心灵和智慧创造的数学艺术美的一个杰作。



牛顿

例5 欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 被誉为数学美的典范，当 $\theta=\pi$ 时得到 $e^{i\pi}+1=0$，这个极其简单的数学式子竟奇迹般地把数海里的五颗看上去毫无联系的明珠巧妙而简单的联系在一起，令人赞叹不已！其中，1和0来自算术，1是实数单位，0被誉为具有比一切数丰富的内容；i是虚数单位，来自代数，圆周率 π 来自几何，自然对数的底e来自高等数学的微积分，π 和e既是无理数又是超越数，这是何等神奇和谐的结合！它给人一种凝练的简洁之美，不期而遇并出乎意料的奇异之美。

如果完全用数字写出这个式子，即为 $(2.71828\cdots)^{3.14159\cdots\times\sqrt{-1}}+1=0$，此式左端显示的是怎样的一种运算啊！从运算的原始意义上讲，它是一个永无休止的无穷过程，然而其结果却奇迹般地归结为0！特别是当人们注意到这5个常数的

身影不仅频繁地出现在数学中，而且经常出现在许多科学领域，它们在宇宙中的重要地位和丰富的内涵可能至今未被完全认识清楚，我们难道不会为它们之间的关系所表现出的高度神秘性和奇异性所倾倒，从而获得一种强烈的美的感受吗？难怪克莱因(数学家)称其为数学中最卓越的公式之一。像这样具有简洁之美的公式太多了，如牛顿的万有引力公式 $F = K\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$(点评：这个方程之所以有名，当然首先在于它的正确性，从而在实践中能引起一种美感。确实，用这个公式去计算引力 F 非常简单，但如果分子不用积，而是质量的和，分母的距离不用平方，而用九次方来表示。这个公式就会变得“丑陋不堪、令人讨厌”。人们马上就会怀疑这公式的正确性，从纯美学的角度上就会使我们愤怒。(阿·基泰依戈罗茨基语))，又如爱因斯坦的质能关系式：$E = mc^2$ 被誉为“神仙写出的公式”。


爱因斯坦

例 6 素数有无穷多个的证明

2000 多年前欧几里得关于素数有无穷多个的证明，被英国著名数学家哈代誉为古希腊水平最高的两个定理之一(另一个是$\sqrt{2}$为无理数的证明)。欧几里得的证明用的是反证法，生动地表现了数学方法美的魅力。请看：

假设素数只有有限多个，那么可以把它们统统写出来，设有 p_1，…，p_n，此外再没有更大的素数了。

可是令 $g = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$，则 g 或者是一个素数，或者是一个合数。

如果 g 是素数，则因 g 不同于 p_1，…，p_n 中的任何一个，故素数 g 比 p_1，…，p_n 都大；

如果 g 是合数，则 g 必有素因数 b，且 b 一定不等于 p_1，…，p_n 中的任何一个(因为若 $b = p_j$，$1 \leqslant j \leqslant n$，便有 $b \mid g$ 且 $b \mid p_1 p_2 \cdots p_n$，从而 $b \mid (g - p_1 p_2 \cdots p_n)$，即 $b \mid 1$，这是不可能的，即 $b \neq p_1, \cdots, p_n$)，故素数 b 比 $p_1, \cdots, p_n$ 都大。

于是，不论哪种情形，总有更大的素数存在。

因此，只有有限个素数的假设是错误的，命题得证。

点评：丝丝入扣的推理过程荡漾着一股逻辑美的韵律，犹如一首玲珑剔透的乐曲中那感人肺腑的旋律，使人在心灵上获得极大的满足，久久不能忘怀。这恐怕就是欧几里得证法的魅力所在。它是古典数学美的一颗珍宝，永远放射着智慧的光辉，同留存至今的任何一件古希腊艺术品比较也毫不逊色!

例 7 数学与诗

诗的数学，如“三个同行七十稀，五树梅花廿一枝，七子团圆正半月，除百零五便得知。”这是明代数学家程大位在《算法统宗》里写的诗，用来表达对《孙子算经》中“物不知数”问题(即“今有物不知其数，三三数之剩二，五五数剩三，七七数

之剩二，问物几何？答曰：二十三")的解法。

数学的诗，如"一去二三里，烟村四五家，楼台六七座，八九十枝花。"宋人邵康的这首诗生动地描绘了自然朴实的乡村景象，宛如一幅淡雅的水墨画，然而它却有一半是用数字写成的，诗意的美隐含在数的和谐之中。

有没有纯粹的"数学诗"呢？一些学者做了肯定的回答。他们认为所谓诗，从某种意义上说，就是既有丰富、深刻的思想内涵，又有和谐、简洁和对称美的形式，凡是具有这些性质的事物都可称为诗，或称有诗的意境。好的诗可以惊天地、泣鬼神，可以将人带到"此中有真意，欲辩已忘言"的艺术境界。以这样的观点来看数学，许多抽象的数学公式、法则、定理，都是能够给人的理智以极大的美感享受的数学诗，例如高等数学中的泰勒级数展开式

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots (x_0 - R < x < x_0 + R)$$

各种不同的函数不管有多复杂，只要满足一定的条件都能表示成如上的统一形式。这意味着凡是这样的函数都具有右端级数所显示的那种排列整齐的无穷层次结构。当 $f(x)=e^x$ 且 $x_0=0$ 时，有

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

令 $x=1$，得到关于 e 的无穷展开式

$$e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

类似地还可得到关于 π 的无穷展开式

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{4}{2n+1} + \cdots$$

在这两个无穷展开式中，取的项数越多，得到的 e 值和 π 值也就越精确，只要对超越数 e 和 π 的深刻性有所了解，你就会发现这种数学现象确实透露出一种绵长的诗的意象，那略带神秘色彩的奇异美的光芒就像秋夜的星空引发的美的遐想。怪不得傅里叶级数理论被喻为伟大的"数学诗"。

真的，数学就像是一座绚丽多彩的大花园。数学是一个五彩缤纷的美的世界，里面有数不清的奇花异草，令人心旷神怡，乐而忘返，它布局简洁、和谐而奇异，充满了美的花果和景色，既有数的美、式的美、形的美，又有理论美、方法

美、应用美，既有对称美、比例美等形式美，又有神秘美、哲理美等内涵美，真可谓美不胜收，记得文学家徐迟先生曾经说过一个比喻："数学里美的概念、定理、公式、问题、理论、思想等等简直就是一座大花园。开的都是人类思维的花朵。它们中有空谷幽兰、高寒杜鹃、老林中的人参、冰山上的雪莲、绝顶上的灵芝、抽象思维的牡丹。"

三、数学美是什么

正如"美是什么?"，2000 多年来，众说纷纭，至今还没有一致公认的结论，仍是一个谜。

"数学美是什么?"在某种意义上说是一个难度更大的谜，它不仅涉及美的本质，还涉及数学科学的性质。国内外学者关于"数学美"所作的多侧面、多角度的思考和研究有助于加深理解数学美。

比较流行的一种说法是，数学美就是"数学中存在的美"，它是纯客观的，哪里有数学哪里就有数学美存在;简单性、统一性、对称性、奇异性等就是数学美的内容。

点评：这种看法，把数学美同数学中存在的某些特性如简单性、对称性、统一性等完全等同起来，实际上是把数学美看成为数学的一种品性，忽视了审美主体在数学审美过程中的能动作用。故这种看法基本上还停留在数学美的表象上，没有接触到数学美的本质。

因此有的学者进一步提出了"数学美因说"。这种观点认为，简单性、对称性、比例性、抽象性、逻辑性、协调性、普适性、新颖性等仅是数学对象中存在着的美的因素即数学美因。它们是存在于数学对象中，能够在数学审美活动中被感知并引起主体美感的客观品性，数学美只能在客体存在数学美因的基础上，经过主体的审知活动并进而产生美感的全过程中显现出来。

点评："数学美因说"在对数学美感和数学美进行分析之后认为，数学美是一种理性美、智慧美，具有最纯净的思辨特征，在理性的高层次上显示了创造的本质力量，这就是数学美的实质。

还有的学者从分析数学美的根源入手，认为数学美来源于生产实践，而生产实践是规律性和合用性的统一，最后得到数学美是数学创造自由形式的结论。

关于数学美的本质问题还存在其他种种看法，例如，有些学者认为数学美的本质是序(order)，又如，有的学者认为数学美的本质是反映自然界在数量关系与空间形式上表现出来和谐、简单与对立统一的一种形式美，等等。

数学美的本质之谜正吸引越来越多的人对它进行研究，一门新兴的数学与美学交叉的学科——数学美学正在创立之中。

四、数学比喻

下面我们试着拿数学与各种艺术作个比较：

1. 数学与音乐

数学和音乐之间存在某些相似之处，在一个音乐家的表演水平得到评判之前，首先要确认一个起码的前提：他的音是准的，仅仅是音准并不能使他成为一个音乐家。如果我们评判哥雅的裸体玛哈一画，只说很逼真是得不到美术的真谛的，如果对一位历史学家的著作只能评判说他没讲瞎话，也是不得要领的。仅凭音乐表演的音准、绘画的逼真、陈述事件的真实是不能构成好音乐、好绘画、好史学著作的，同样，仅靠逻辑正确也成不了好数学的。

数学和音乐是人类精神两种最伟大的产品。它们全然是人造的两个金碧辉煌、自给自足的世界，前者仅用了十个阿拉伯数字和若干符号就造出了一个无限的真的世界，后者仅用了五条线和一些蝌蚪状的音符就造出了一个无限的美的世界。

《春江花月夜》和肖邦小夜曲的旋律也是不存在于自然界中的，在大自然中，你绝不会听到类似于人造的、令人着迷的音乐，因为它原是你自己的心声，在数学里，n 维空间、无限维空间、超曲面等人造的世界，甚至“2”、“直线”、“平面”也都是人类精神最抽象的产物。

君不是也听说过：微积分被称为“无限的交响乐”，而黎曼几何与普兰克的钢琴合奏曲一样优美的感叹吗。

2. 数学与文学

数学也像文学，伽利略有句名言：“数学是上帝用来书写宇宙的文字。”数学家 A.L. 哈蒙德说：“数学是看不见的文化。”只是与音乐的相像形式不同而已，文学中的写作和阅读与报纸、广告、路牌的写作和阅读有关，就像数学与实用的算术有关一样。在日常生活中我们都需要读、写、算，但是文学远不止是读与写，而数学也远不止是计算。许多对语言、对语言的结构、历史及其美感兴趣的人，靠教语言的未来实际使用者的语言学基础谋生。同样地，许多，也许是大多数对今日数学感兴趣的人靠教算术、三角学或微积分来谋生。

3. 数学与绘画

绘画来自物质现实，数学也是如此——但画家不是照相机，数学家也不是工程师……在绘画与数学中，美有客观的标准——画家讲究结构、线条、造型、机

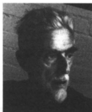
理，而数学家讲究真实、正确、新奇、普遍——不过比较起来这些都是容易满足的。

作为绘画的数学，我们联想到了达·芬奇的绘画，特别是埃歇尔的作品。

五、数学美术作品欣赏(数学艺术奇葩)

1. 埃歇尔作品欣赏

荷兰画家莫里茨·科内利斯·埃歇尔(Maurits Cornelis Eschelr, 1898～1972)，于1898年出生在荷兰洛瓦当的一个水利工程师的家庭里，后在阿纳姆度过了童年。在中学里，埃歇尔并不是一个好学生，两次留级，只有绘画课的成绩还好一点。1919年，他进入哈勒姆的建筑与美术学校学习建筑，后又改学绘画。他受到严格训练，很快掌握了木刻技术。开始时的职业是风景画家。1937年以前，他描绘意大利南方和地中海沿岸的城市和乡村风光，也有少量肖像画和动植物画。如果他在这方面继续努力下去，很可能在同时代的版画家中寻得一席体面的地位。但是他的作品开始心理化，不再在外部视觉中吸取美感，而热衷于对规律性、数学结构、连续性、无限性、画面潜在冲突的追求，他在一条前人没有走过的路上辛勤的探索着。于是评论界对他失去热情，他的画也卖不出去，知音者寥寥无几。然而他非常沉着，无视周围的压力而继续他的追求。到了20世纪50年代，许多数学家、结晶学家、物理学家对埃歇尔的作品发生了浓厚的兴趣，他们在埃歇尔的作品中看到了某些定律的再现。于是，他的作品被高价抢购，被刊登在各种科技书籍杂志上，受到热烈的赞扬。美术评论界也先倨后恭起来。

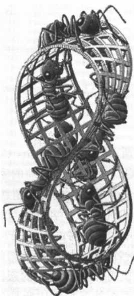


M.C. 埃歇尔

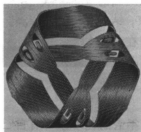
1970年，他住在勒盎的一个艺术家协会里。在那里，年老的艺术家都有自己的画室，免费享受一切。1972年3月20日，埃歇尔在那里与世长辞，终年74岁。

在他的构思和创作中，他是一个思维的人。其作品具有几何学特性。很多数学概念：无穷大、相对性、反射与反演，以及一个三维与其在二维表面上的绘图之间的关系。最重要的是，对称概念是他作品的核心。四种对称和相似性，连同对无穷大的无休止的强烈爱好，成为他作品的实质。

《默比乌斯带》是埃歇尔非常著名的作品。德国19世纪数学家默比乌斯(Möbius)第一次应用这种带子是为了表明拓扑学上的一些观点。即用一个很长的长方形纸条，把两头扭转180°粘起来，于是这条带子只是一条边和一个面。就是说，你想在这条带子的外面涂颜色，结果你却把整个带子的内外都涂上了颜色。



默比乌斯带 II 木刻　1963 年
（45×20 cm）



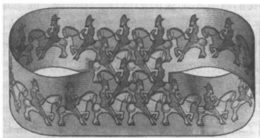
默比乌斯带 I　1961 年

九个大蚂蚁爬在这条带子的不同面上，如果你沿着蚂蚁爬的路线找下去，只能找到一个面。如果在这条带子的纵向中央将其一剪为二，许多人认为这将分离为两条带子，然而不，带子没有分离，仍然只有一条，只是长了许多而已。

但是，如果我们沿着距纸带一条边 1/3 的直线纵向剪开一个默比乌斯带，我们便得到两个缠绕在一起的环：一个是真正的默比乌斯带；另一个是有两个半纽结的二面环！难怪默比乌斯带已成为能够想到的最诱人的数学创造物之一，一种其秘密完全隐藏在其缠绕的表面之后的几何魔术成果。

埃歇尔这位当代艺术家则在一种"应用"意义上使用了默比乌斯带，埃歇尔是在与一位英国数学家的一次偶然相见之后，才开始注意默比乌斯带的，不幸的是他后来忘记这位数学家是谁了。这次偶然会面显然很富有成果，因为它激励埃歇尔根据默比乌斯的基本图案创作了三幅作品。由于埃歇尔爱好形状怪诞的图案，所以他的作品中充满了生命：大蚂蚁沿着一个默比乌斯带状的梯子的一面往前爬，结果只发现它们在一个无尽的循环中走到"另一个"面（图默比乌斯带 II）；一对抽象动物（可能是蛇）沿着看似分开的默比乌斯带的两个部分互相追逐（图默比

乌斯带 I)；还有一个由正好互为镜像的两组(黄色和灰色)骑马人组成的队列，这两组骑马人沿着一条扭曲的环形带的两个面朝相反方向行进(骑士图，这不是一个真正的默比乌斯带，因为它有两个面和两条边；事实上，当沿着中心线纵向剪开默比乌斯带时，得到的东西就是它。将矩形带扭转 360°之后把其端点连接起来，也可以得到它。为了增加复杂性，埃歇尔《骑士图》中的带子在图画的中心连接起来，从而接通了两个分开的面，使这两组马能够相遇)。埃歇尔是一个天才，他擅长刻画生活中模棱两可或出乎意料的事情，他在默比乌斯带中，为他的艺术创作才能找到了一片肥沃的土地。



骑士图 1946 年

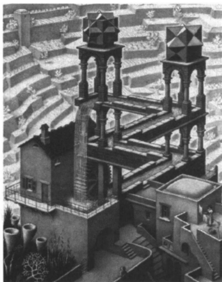
默比乌斯带吸引了艺术界的注意力是很自然的事情。瑞士雕塑家马克斯·比尔(生于 1908 年)是那些为默比乌斯带美学潜在价值所吸引的艺术家中的一个，他在 1935 年发现了默比乌斯带：“我在为在上升气流中转动的悬挂雕塑品寻找一种解决办法时，创造了一个单面物体。我的研究既不是科学的，也不是数学的，而是纯美学的……我把我的雕塑称为环形带。”很显然比尔并不知道他的发现已被数学家知道了近一个世纪，而且他在了解到这个事实之后非常失望。比尔说：“后来我得知我的作品(我以前认为是由我发现或发明的)只是所谓的默比乌斯带的艺术表现，而且在理论上与它完全一样……我对我不是首先发现这个东西的人这一事实感到震惊。所以我曾经有一段时间停止了在这个方向上的进一步研究。”

在科学幻想故事“一列名叫默比乌斯的地铁”中，故事情节围绕一列从波士顿地铁系统中神秘消失的第 86 号列车而展开。这个地铁系统前一天才举行通车仪式，但是现在第 86 号列车却消失了，什么痕迹也没有留下。事实上，很多人都报告说他们听到了列车在他们的正上方或正下方飞驰的声音，但是谁也没有真正地看到过它。当确定这列火车位置的所有努力都失败之后，哈佛的数学家罗杰·图佩罗给交通中心打电话，并且提出了一个惊人的理论：这个地铁系统非常复杂，它可能变成了一个单面曲面(默比乌斯带)的一部分，而那列在当时丢失的火车可能正在这条带子的“另一个”面上跑它的正常路线。面对极度惊愕的市政官员，他耐心地解释了这种系统的拓扑奇异性。在经过一段时间——确切地说是十星期之

后——这列丢失的列车又重新出现了，它的乘客都安然无恙，只是有一点累*。

埃歇尔与无穷大有关的作品分成三类：①无止境循环；②平面的规则分割；③极限。

在第一类无止境循环中，埃歇尔通过在二维画布上画出永恒运动这个使现实世界中一代代发明家和空想家感到困惑的东西，表现了他对节奏、规律性和周期性的强烈爱好。这些图画总是使用某种精妙的螺旋图案或者是隐藏的"秘诀"，因此它们体现着某些奇异风格，好像埃歇尔喜欢取笑自然规律一样。用他自己的话说："我禁不住嘲笑我们所有不动摇的必然性。比如说，故意地混淆二维和三维、平面和空间，或者取笑万有引力，是一种极为有趣的事。"我们已经看到他如何使用默比乌斯带的拓扑特性，描绘一队骑马人或者一群在无止境的循环中互相追逐的大蚂蚁。在作品《瀑布(永恒运动)》(1961)中，他巧妙地改变了建筑物轮廓的形状，结果呈现给我们一种荒诞的情景：一股水流沿着一条封闭的环行道无止境地流着，当水流下时带动一个轮子转动——一种以自身能量为能源的机器。水从左上方倾倒下来，推动了轮子，然后水在水渠里继续流动。是往上流，不，又好像是平着流。终于水又回到了原地，再次从上面倾倒下来推动了轮子……"永恒的运动"。

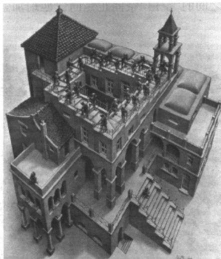


瀑布(永恒运动) 版画 1961年

---

* A.J.Deutch(1950). 我们从这里去哪里? Fawcett Crest, 1972

在作品《上升和下降》(1960)中，埃歇尔精心地使用了透视画法规律，画出一队爬上楼梯的士兵；他们一直往上爬，结果却发现他们回到了出发点！士兵们说："是的，是的，我们往上爬呀爬呀，我们想像我们在上升；每一级约十英寸高，十分使人厌倦——它到底会把我们带到哪里？哪里也没有去；我们一步也没走远，一步也没升高。"



上升和下降 版画 1960 年

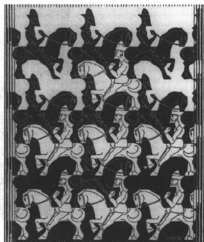
第二类平面(在有些情况下是空间)的规则划分已经成为埃歇尔的标志。无休止地重复单一的基本图案，不重叠也不留任何空白的可能性，向他提出了一个无法抗拒的挑战："它仍然是一个极有吸引力的活动，一种我已经上瘾的真正癖好，而且我有时发现很难使自己离开它。"但是与他从中受到极大启发的伊斯兰图案不同的是，埃歇尔的基本图案很少是抽象的；相反，它们是可以辨认的事物——人、鸟、鱼和取自日常生活的无生命物体。埃歇尔在下面的话中表达了他对纯粹抽象的厌恶：摩尔人是使用全等图形填充一个平面的大师……伊斯兰教禁止画"图像"。在他们的棋盘镶嵌术中，他们只把自己局限于有抽象几何形状的图形……我发现这种限制格外令人难以接受。正是我自己的模式成分的可辨认性，才是我对这个领域的兴趣从未停止的原因。

埃歇尔以具体的、可辨认的物体描绘数学概念的能力，可能是他最大的天赋。例如，我们可以比较一下珀加索斯和骑士图，前者是公元前 6 世纪的希腊抽象图案；后者出自埃歇尔之手。这两幅图正好属于相同的对称群——两幅图都允许两次平移：一次沿着每一行，另一次横跨两行。希腊图案尽管从美学角度讲令人喜爱，但不是特别有趣；而埃歇尔的图案因为有一系列填充整个图形的珀加索

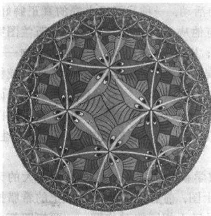
斯(希腊神话中生有双翼的飞马)，而显得生动活泼。更仔细地观察，我们发现每一匹黑色的珀加索斯周围有四匹相同的白色珀加索斯，反之亦然！事实上，这幅画可以用两种同样有效的方法解释——在白色背景下飞行的黑色珀加索斯或者是在黑色背景下飞行的白色珀加索斯。这说明了埃歇尔喜爱的另一个主题——对偶性。这里是通过精心使用对称原理而得到的对偶效果：两匹相邻珀加索斯(不管是黑色的还是白色的)之间的“空白”空间正是同一匹珀加索斯的复制品——只是颜色相反。



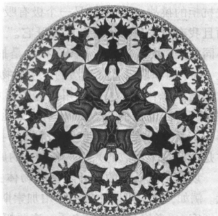
珀加索斯



骑马的人 1946 年平面的规则划分 III



圆的极限 III 1959 年



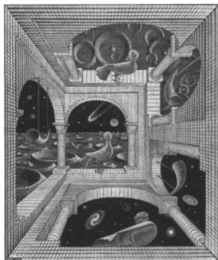
圆的极限 IV 双色木刻 1960 年

在第三类极限中，为表达他对完整无缺的无穷大符号的渴望，他试图找到一种方法表达一种从中心向外部的不断缩小。所幸的是他从加拿大数学家 H.S.M. 考克斯特的一本书《几何学导论》的插图中找到了这种方法。从理论上说考克斯特的插图与庞加莱的非欧几何学模型有关，埃歇尔却立刻认识到了它的美学价值，埃歇尔从考克斯特的插图演绎出了其最成功的作品中的四种。埃歇尔本人对作品《圆的极限Ⅲ》的评述：在彩色木版画《圆的极限 III》中，《圆的极限 I》中的缺点大部分被克服。我们现在只有"直通"系列，而且，属于一个系列的所有鱼都有相同的颜色，并且沿着一条从一边到另一边的圆形路线首尾相连游动。离中心越近，它们变得越大。为了使每一行都与其周围形成完全的对比，需要四种颜色。当所有这些成串的鱼像来自无穷远距离的火箭，以角从边界射出并且再次落回到它射出的地方时，没有任何单个的成员到达边缘。因为边界是"绝对的虚无"。然而，如果没有其周围的空虚，这个圆形的世界也不会存在。这不仅仅是因为"内部"的先决条件是"外部"，而且还因为正是在这个"虚无"的外部，建立起这个框架的弧的中心点以几何的精确性被确定在那里。

其他任何人能够如此简洁地表达庞加莱模型的实质吗？埃歇尔给考克斯特寄去一份《圆的极限Ⅲ》，然而考克斯特的答复令他困惑不解："我收到一封来自考克斯特的关于我送给他的彩色鱼画的满腔热情的信。他花了三页解释我实际做了些什么……十分可惜的是我什么也不懂，绝对丝毫不理解这些解释……"考克斯特曾经请埃歇尔听他的一个关于非欧几何学的讲演，并且相信他能够跟上这个话题。然而，考克斯特的努力仍未达到目的，从埃歇尔的话中我们可以推测出这一点。

作品《圆的极限 IV》是埃歇尔心目中的 L^2，这是根据加拿大几何学家考克塞特(Coxeter H.M.s)的建议画了一幅 P 模型的图，图中黑色的魔鬼与白色的天使嵌满了整个 P 平面，这些黑魔鬼看起来大小不同，但按 P 长度都是相同的，白天使也一样。数学家证明过，罗氏几何中没有相似形，凡相似者必合同，从埃歇尔的画里看得很清楚。先研究二维的情况。进行的方法是用通常欧几里得的概念来作罗巴切夫斯基平面的模型，不过其中"距离"和"直"这些基本概念要重新理解。我们称这个模型为 L^2，其中上标"2"(和"S^1"中的 1，等等)指空间的维数。("L^2"读为"$L2$"，不是"L 的平方"。)在欧几里得的平面 E^2 上，L^2 有两种标准的表示法，即射影模型和保形模型(保角模型)。在这两种情况下 L^2 都是以 E^2 中的圆盘——单位半径的圆的内部来表示的。依照射影模型，罗巴切夫斯基几何中的"直线"是用弦来表示的，即通过圆盘的一段直线，它在 E^2 的欧氏几何中也是直的。依照保形模型，罗巴切夫斯基的"直线"画成通过圆盘的弧，对于 E^2 的几何来说，它是圆弧，并与 S^1 相交成直角。圆盘内两点 A，B 之间的罗巴切夫斯基"距离"可用一个简单的公式给出，值得注意的是，它在每个模型里都具有几乎完全

一样的形式。

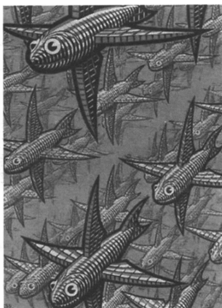


另一个世界

虽然射影模型具有明显的优点，即把罗巴切夫斯基的“直线”描绘得正确，但保形模型却具有稍微精细些也许是更有意义的优点，即能把罗巴切夫斯基的“角”描绘得正确。它有使微小的图形不受歪曲的效果，只要在每一点作适度的放大即可。还有，在这个模型里罗巴切夫斯基的“圆”总是正确地描绘为圆。荷兰艺术家 M.C. 埃歇尔做过一些非常优美的木刻，用惊人的方式说明了这些事实(插图《圆的极限 IV》)，是 L^2 的保形模型的精确表示。(作这些图的想法是加拿大几何学家 H.S.M. 考克斯特建议的。)注意靠近边缘的地方虽然图形变得非常小而拥挤，其形状仍然大致保持不变。每个图形被检查的部分愈小，其形状保持得愈好。这就是保形表示的意义：任意小的图形精确保形，只是尺度不同。

罗巴切夫斯基的世界是个无穷大的世界。例如，埃歇尔的第二个木刻中的每个魔鬼都有相等的罗巴切夫斯基面积，并有无穷多个魔鬼。边界圆周 S^1 表示 L^2 的无穷远。

让我们再来欣赏一下埃歇尔的两幅奇特的版画：《白昼与黑夜》是一张博得广泛称誉的作品。作品下方是黑、白相错的菱形土地。目光引向上方，土地变成了鸟，黑鸟和白鸟互相填补。左边的白昼风景正好是右边黑色风景的反射。从左至右是白昼到黑夜的渐变过程，从上至下是飞鸟到土地的渐变过程。在这张版画中，我们同时看到由白天渐变为黑夜，由田地渐变为飞鸟的过程。而十分巧妙的是白鸟和黑鸟的外轮廓是互为连接、紧密排列的，各向相反的方向飞去。对称形的构图颇有装饰味，画面既美又耐人寻味。我们似乎可以在这里领会到生物与土

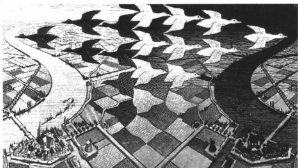


深度 1955 年

地不可分割的关系以及自然嬗变的交替与循环。《另一个世界》似乎是在宇宙飞船上所看到的星空景象，但又像置身于一间梦幻般的古旧建筑物中。房子有 3 个不同的视点，房间的中心点既像房间上半部的底点，又像房间下半部的顶点。从 3 个不同角度看房子外面的景色，好像是月球上的环形山及宇宙星空。窗口的人头鸟和类似牛角的东西更增添了画面的神秘感。埃歇尔的版画向我们展现着一个神奇的世界、一个神秘莫测的谜。他的作品给予我们的不仅是美感，还能使我们从错觉中得到想像、发现和启示。埃歇尔好像拿着一条魔棍，使我们在黑夜里经历着幻觉和梦境，看到许多难以想像的奇异景象。科学家们甚至可以通过埃歇尔的画，找到自己所设想的概念或原理。有些科学家还用他的版画作教科书的插图或科学著作的封面画。

埃歇尔自己说，他追求的目标不仅是“美”，而更主要的是“奇”。他追求别人从未表现过的东西，研究绘画所能提供的可能性。绘画是形象化的语言，埃歇尔把许多用语言无法表达的思想用形象体现出来，把一些现实生活不可能存在的事物用他的想像描绘出来。诸如永恒、无限、虚无、轮回等带有某些哲学意味的观念，在他的一些版画中都有形象的表现。埃歇尔用数学的头脑进行构思，以精密的计算进行草图，有严格的结构，有精确的规则。不仅如此，他还以极大的毅力和耐心，以一丝不苟的精神进行刻版制作。他自己说他创作那些作品时，简直伤

透了脑筋。



白昼与黑夜　　木刻　1939年

历史上许多新的事物、新的创造，在刚出现时常常受到冷落，不为世人重视。埃歇尔的新奇创作也是这样。然而他无视周围的压力，坚持走自己的道路，以锲而不舍的精神，执着地追求，辛勤地探索，在版画艺术上开辟了一个崭新的领域。

2．数学是一门创造性的艺术

我们一直在谈论数学与艺术，数学的发展史告诉我们，数学是一门创造性的艺术，因为数学家创造了美好的新概念；数学是创造性的艺术，因为数学家像艺术家一样地生活，一样地工作，一样地思考；数学是创造性的艺术，因为数学家们这样对待它。我强烈感到这一点，我也很高兴能有机会告诉你们这一点。

参 考 文 献

霍夫斯塔特．1984．GEB——一条永恒的金带．乐秀成编译．成都：四川人民出版社
马奥尔 E．2000．无穷之旅——关于无穷大的文化史．王前等译．上海：上海教育出版社
王庚．1988．关于数学美的特征．芜湖师专学报．(1)：110～115
王庚．1989．数学美在高等数学教学中的应用初探．芜湖师专学报．(2)：37～41
易南轩．2002．数学美拾趣．北京：科学出版社
张楚廷．2000．数学文化．北京：高等教育出版社

11 影子几何学

何为射影几何？在回答这一问题之前，我们注意到在已熟悉的初等几何(平面几何、立体几何)中，有一个非常平凡但又十分重要的前提，即欧几里得几何(欧氏几何)中所讨论的一切图形性质以及图形之间的位置关系和度量关系，不论搬动到地球的任何地方都不会改变，这里的搬动即指刚体运动，它是保持距离不变的变换(保距变换)。按照近代德国数学家克莱因(C.F.Klein，1849～1925)的观点，欧氏几何是研究图形在一切运动(保距变换)下的不变性质和不变量的学科，但有的变换并不保距，例如：太阳光以平行光线把玻璃窗上的剪纸画照射到地面上，这时画和影子已不全等，这种从画到影子的变换，称为平行投影。又如，电影放映机通过放射灯的光线将电影胶片上的图像照射到银幕上，这时原图与电影画面(即原图的影子)已不全等；这种从胶片到银幕的不一定保距的变换，称为中心投影。这时研究经过有限次平行投影图形所保持的不变性与不变量的学科就是仿射几何；而射影几何便是研究经过有限次中心投影图形所保持的不变性与不变量的学科。


克莱因


蒙日

射影几何具有悠久的历史，其中某些内容公元前就发现了，例如交比、调和点等许多重要观念早在阿波罗尼奥斯和巴卜士(Papprus，约 300～350)的著作中就见到了，但是后来居上的解析几何支配了几何学的研究方法，直到 19 世纪初才由法国数学家蒙日重新唤起人们的注意，这以后他的许多学生以及其他著名学者在射影几何中有过重大贡献，其中以彭赛列(J.V.Poncelet，1788～1867)和冯·施陶特(K.G.C.Von.Staudt，1798～1867)贡献最大。前者是蒙日的学生，当他在拿破仑的远征军中任军官时，曾被俘并在俄国萨拉托夫监狱里渡过了一(1813～1814)年，在狱中写成了《论图形的射影性质》，并于 1822 年出版，该书系统研究了图形在中心投影下的不变性质，它奠定了射影几何学的基础。因此，他被公认为射影几何的主要奠基人，在这之前，射影几何的研究主要是在欧氏几何的框架里进行的，而欧氏几何中的最基本概念——距离，以及角度、面积等，在中心投影下是变化的，既然是这样，为什么射影几何一定要依附于以距离为基础的欧氏几何？于是，在 1847 年，德国数学家冯·施陶特这位纯粹几何学者，在其著作《位置的几何学》中，阐明了射影几何学是比欧氏几何还基本且与距离无关的学科。他还与其他数学家

一起建立了射影几何自已的公理系统，至此，射影几何作为一个独立的几何学科已被完整地建立起来了。



冯·施陶特

射影几何与欧氏几何最显著的区别是射影几何中没有“平行”的概念，任意两条不同的射影直线均恰好相交于一点；任意两个不同的射影平面均恰好相交于一条直线。因此，射影几何中的点、直线、平面、空间这些基本元素与欧氏几何中的是不同的。所组成的图形诸如：点列、线束、三角形、四边形、二次曲线等也与欧氏几何中的不同，而它们的坐标(所谓射影坐标)表示也与欧氏几何大不相同。这里主要介绍平面射影几何的这些不同点，由此揭示射影几何的内在美的规律性——对偶性，并讨论在有限次中心投影(射影变换)下，图形的基本不变量(交比)以及不变性质(特别是关于三角形、四边形以及二次曲线的一些著名而优美的性质)。

一、中心投影与射影几何基本研究对象

设 π 和 π' 是空间的两个相交平面，交线为 l，P 为不在上述两平面内的一点，对于平面 π 上的点 A，如果直线 PA 与平面 π' 相交于点 A'，我们称点 A' 为点 A 的**射影**，其中 P 叫做射影中心，这种映射叫做以 P 为中心的**中心投影**(也叫中心射影)。(图 11.1)

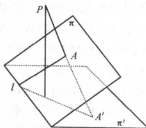


图 11.1

这里的映射并不是一一对应，如果 PA 碰巧与平面 π' 平行，那么点 A 在平面 π' 上就没有射影，同法过 P 点作一平面与平面 π' 平行，那么该平面必与平面 π 相交于直线 m，此时 m 直线在平面 π' 上也没有射影(图 11.2)，类似地，过点 P 作平行于 π 的平面，与平面 π' 相交于直线 m'，这时直线 m' 上的点都不是平面 π 上点的射影。1639 年，笛沙格 (Desargues, 1591～1661)想到：为了使中心投影完全实现，即中心投影成为一一对应，固然可以把平面 π 中没有射影的一条直线 m 挖掉，但是为什么不可以在平面 π' 中添加一条直线，使得直线 m 射影到它的上面

呢？具体地说，每一条直线上添上一个理想点，也叫做**无穷远点**，并假定平行直线相交于无穷远点，添上无穷远点，添上无穷远点的直线叫做**拓广直线**，它的合理性正像广阔土地上绝对平行地无限延伸着笔直的钢轨，看上去好像越向远方，距离越窄，最后相交于地平线上的一点(图 11.3)，它是一个闭的图形，就像圆。显然不平行的直线上有不同的无穷远点，这样，平面上一切无穷远点的集合叫做**无穷远直线**，而添上无穷远直线之后的平面叫做**拓广平面**。拓广平面也是闭的，就像对径点作为同一点的球面。同样，三维欧氏空间中一切无穷远点的集合叫做**无穷远平面**，添上无穷远平面的空间叫做**拓广空间**，这时不但平行直线交于一个无穷远点，而且平行平面交于一条无穷远直线，一条非无穷远直线和它的平行平面交于一个无穷远点。

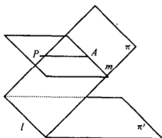


图 11.2

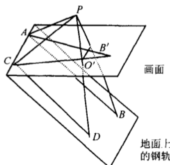


图 11.3

如果把无穷远元素(点、线、面)与非无穷远元素平等看待，不加区别，拓广直线、平面、空间就叫做**射影直线、平面、空间**；打个比喻：如果将所有具有某 A 国国籍人加上他们之间 A 国法律关系不妨设为“欧氏空间”，现在假定来了一个有影响的外国人，这好像是在“欧氏空间”中添上“无穷远元素”；这个外国人如果始终打着外国的招牌并未加入 A 国国籍，这时的情形正像“拓广空间”；如果有一天这个外国人加入了 A 国国籍，于是便享有和 A 国中任何公民一样的平等权利和法律关系，这时的情形便是“射影空间”。在射影空间中，仍然有：任意不同的两点决定惟一一条直线；任意不共线三点或者任意一条直线和不在此直线上一点确定惟一一个平面；由于添加了无穷远元素(无穷远点、直线、平面)，平行的概念便消失了，平行与相交在这里得到了统一。射影直线、射影平面便是**平面射影几何的基本研究对象**。那么射影平面上的“三角形”、“四边形”、“二次曲线”又是什么样子呢？仅以一回中心投影(图 11.4)为例，可见三角形变为三角形，而椭圆、双曲线、抛物线、圆却互相变，同法可知四边形在射影几何里的对应图形是**完全四角(边)形**(图 11.5)。因此，在射影几何中，三角形还是三角形，而椭圆、双曲线、抛物线、圆只能是**圆锥曲线**，常用椭圆为代表进行讨论，由于点在直线

上、直线过点这种最基本的关联关系不变。所以点在直线上变动所得到的**点列**以及过一定点的直线转动所得到的**线束**，为射影几何的**一维基本形**，点在平面上变动所得到的**点场**以及过一定点的一切平面所构成的**面把**，为射影几何的**二维基本形**。

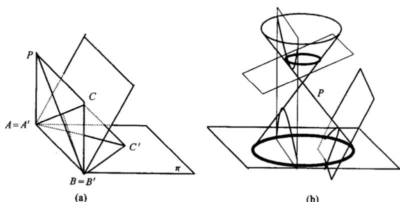
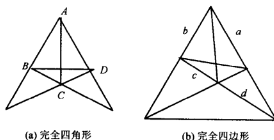


图 11.4



(a) 完全四角形 (b) 完全四边形

图 11.5

二、射影坐标

笛卡儿在欧氏平面里引入直角坐标系，从而将平面图形的性质和问题化成相应的代数问题，产生了解析几何。将欧氏平面扩大成射影平面之后，是否仍有适宜的坐标系来表示点、射影直线及其他几何图形？答案是肯定的。

仍从欧氏平面开始，设在平面上已经建立了以 O 为原点的直角坐标系，不妨设点 $P(x, y)$为 l_1：$A_1x + B_1y + C_1 = 0$，l_2：$A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 的交点，由线性代数中的克莱姆法则解得：

(1) 当$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$时，它们的交点为普通点。

这时

$$1 : x : y = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = x_0 : x_1 : x_2$$

其中 $x = \frac{x_1}{x_0}$，$y = \frac{x_2}{x_0}$。

(2) 当$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$时，因为 $l_1 /\!/ l_2$，它们的交点为无穷远点，规定

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = x_0 : x_1 : x_2$$

其中 $x_0 = 0$。

以上的(x_0, x_1, x_2)即为 P 点的齐次坐标，于是我们便可乘着“这艘”数学的“宇宙飞船”去遨游无穷远的“太空”了。

具体地说，(x, y)为一点 P 的坐标，令 $x = \frac{x_1}{x_0}$，$y = \frac{x_2}{x_0}$，$x_0 \neq 0$。则三数 x_0，x_1，x_2 叫做点 P 的齐次坐标，记为 $P(x_0, x_1, x_2)$，(x, y)也叫 P 点的非齐次坐标。而当 $x_0 = 0$ 时，则规定(x_0, x_1, x_2)为具有方向 $x_1 : x_2$ 的直线上的无穷远点。同样如果将 x_0、x_1、x_2 一视同仁不再区分无穷远点和普通点，这时 P 点的齐次坐标(x_0, x_1, x_2)称为**射影坐标**。这样，每一组不同时为 0 的三个有序数组(x_0, x_1, x_2)都是拓广平面上一点的齐次坐标，当 $\rho \neq 0$ 时，则$(\rho x_0, \rho x_1, \rho x_2)$与$(x_0, x_1, x_2)$代表同一个点，记作$(x) = (x_0, x_1, x_2)$，$\rho(x) = (\rho x_0, \rho x_1, \rho x_2)$。

设 $u_0 + u_1 x + u_2 y = 0$(u_1, u_2 不全为 0)是欧氏平面上一条直线的方程，如用齐次坐标表示，它可以写成

$$(ux) = \sum_{i=0}^{2} u_i x_i = u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0 \tag{11.1}$$

这也是拓广直线的齐次方程，这直线上的无穷远点是$(0, -u_2, u_1)$，拓广平面上的无穷远直线的方程显然可以写成 $x_0 = 0$。这样，每一个齐次线性方程都代表拓广平面上一条直线。由于比值 $u_0 : u_1 : u_2$ 完全确定直线，$(u) = (u_0, u_1, u_2)$就叫做齐次线坐标，(x)叫做齐次点坐标，方程(11.1)叫做点(x)和线(u)的关联条件或结合条件。

三、对偶原理

在射影几何里除了普通元素与无穷元素是平等的以外，在射影平面上点与直线也是平等的，这是因为关联关系是射影几何的基本关系，在关联条件(11.1)中，(x)和(u)有完全的对称性，这就使得它们在逻辑上取得平等的地位，它们叫做平面上的**对偶元素**，而“点在直线上”和“直线过点”叫做平面上的**对偶关系**。

已知平面上一个以点和直线构成的图形，把其中点线对换，“连接”和“相交”，“落在”和“通过”对调，就得到另一个图形，叫做原图形的对偶，点列和线束对偶，三角形是自对偶形。

对于平面上一个只涉及点与直线的关联关系的命题，如果把其中点与直线对换，“连接”与“相交”，“落在”与“通过”对调，就得到一个新命题，叫做原命题的对偶。

所谓对偶原理即是指：关于射影平面上的任何一个只涉及点与直线的关联关系的命题，都必有另一个与它互为对偶的命题，且它们同真同伪(即如果证明了其中一个，另一个不用证明便可以承认了，因为从代数的观点看，这个对偶命题的证明是完全相同的)。

例 1 巴卜士定理和笛沙格定理及其对偶

巴卜士定理	对偶定理
设同一个平面上有不同的直线 l_1 和 l_2，A_1, B_1, C_1 是 l_1 上三个点，A_2，B_2, C_2 是 l_2 上三个点，它们都不同于两直线的交点 O，则它们交叉连线的交点在一条直线 l 上(图 11.6(a))	设 L_1 和 L_2 是同一个平面上两个不同的点，a_1, b_1, c_1 是过 L_1 的三条直线，a_2, b_2, c_2 是过 L_2 的三条直线，它们都不同于 L_1，L_2 的连线，则它们交叉交点的连线交于一点 L(图 11.6(b))

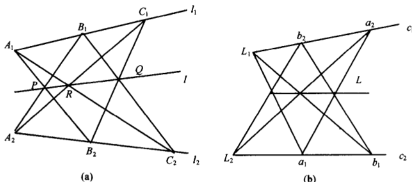


图 11.6

笛沙格定理	对偶定理(也是逆定理)
若两个三角形$\triangle A_1B_1C_1$与$\triangle A_2B_2C_2$,对应顶点的联线A_1A_2、B_1B_2、C_1C_2相交于一点S,则它们对应边的交点在一条直线s上	若两个三角形对应边的交点在一条直线s上,则它们对应顶点的连线交于一点S

对于不共面的两个三角形,笛沙格定理仍然成立,由于在空间中点和面是对偶元素,由相应的空间对偶原理便知其对偶定理也成立,只是这一对偶定理中牵涉到10张平面的互相关系,在纸上画此图时,无法看清楚,如果不是由于对偶原理,便无从发现此定理。

四、射影变换

简单地说:一(二)维射影变换就是一(二)维基本形自身到自身的一(二)维射影对应,其中射影对应指有限回中心投影(透视)链,自身到自身可以理解为两个共底的点列、共点的线束、共面的点场。

由于一、二、三维基本形里已经建立了齐次坐标,所以射影对应或射影变换都可以通过齐次坐标间的满秩线性变换来表示。例如,设(x),(x')为两个点场的齐次坐标,则射影变换$(x)\to(x')$可以用三个变数的齐次线性变换

$$\rho x'_i = \sum_{j=0}^{2} c_{ij}x_j, \qquad \det(c_{ij}) \neq 0 \qquad (i = 0,1,2) \tag{11.2}$$

表示,式中$\det(c_{ij})$表示行列式,ρ是非零比例常数,解这个方程组,就得到逆变换$(x')\to(x)$的方程组。

射影变换的一个基本性质就是保持关联关系,就是说,它把线性相关元素变成线性相关元素。例如,点场之间的变换式(11.2)就把点列变点列,线束变线束。由此可以看出,涉及关联关系的定理(如笛沙格定理),经过射影变换后仍然成立。这种经过射影变换后仍然保持的性质叫做**射影性质**。

基本定理 若在两个n维$(n=1,2,3)$基本形中,分别指定一组$n+2$个元素,其中每组里的每$n+1$个元素线性无关(例如,两个线性无关的点不重合,三个线性无关的点不共线,四个线性无关的点不共面),则两个基本形间,存在惟一射影对应,使两组元素按给定的次序相对应。

笛沙格定理的证明:由图11.7,设A_1B_1和A_2B_2交于P,B_1C_1和B_2C_2交于Q,C_1A_1和C_2A_2交于R,现在我们证明P,Q,R共线。由基本定理和基本性质,可设PQ为无穷远直线,于是$A_1B_1 /\!/ A_2B_2$,$B_1C_1 /\!/ B_2C_2$,为了证明R在无穷远直线PQ上,只需证明$C_1A_1 /\!/ C_2A_2$,由$A_1B_1 /\!/ A_2B_2$可知

$$\frac{SA_1}{SA_2}=\frac{SB_1}{SB_2}$$

由 $B_1C_1 /\!/ B_2C_2$ 可知

$$\frac{SB_1}{SB_2}=\frac{SC_1}{SC_2}$$

于是

$$\frac{SA_1}{SA_2}=\frac{SC_1}{SC_2}$$

从而 $C_1A_1 /\!/ C_2A_2$。

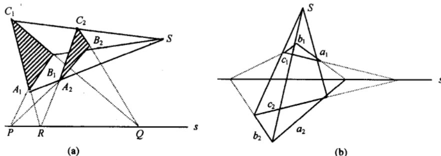


图 11.7

巴卜士定理的证明：由图 11.6，设 A_1B_2 与 A_2B_1 交于 P，B_1C_2 与 B_2C_1 交于 Q，现在证明 P,Q,R 共线，由基本定理和基本性质，可设 PQ 为无穷远直线，于是 $A_1B_2 /\!/ A_2B_1$，$B_1C_2 /\!/ B_2C_1$，为了证明 R 也在无穷远直线 PQ 上，只需证明 $C_1A_2 /\!/ C_2A_1$ 即可，设 l 与 l_2 交于 L，由 $A_1B_2 /\!/ A_2B_1$ 与 $B_1C_2 /\!/ B_2C_1$ 有

$$\frac{LA_1}{LB_2}=\frac{LB_1}{LA_2},\qquad \frac{LB_1}{LC_2}=\frac{LC_1}{LB_2}$$

从而

$$LA_1\cdot LA_2=LC_1\cdot LC_2$$

即

$$\frac{LA_1}{LC_2}=\frac{LC_1}{LA_2}$$

所以 $C_1A_2 /\!/ C_2A_1$

五、交　　比

根据射影对应的基本定理，一维基本形(如点列)间的一个射影对应是由三对对应元素惟一确定的。若在一个射影对应中，一个一维基本形中的四个元素 E_1，E_2，E_3，E_4 依次对应于另一个一维基本形的 E'_1，E'_2，E'_3，E'_4，则四个元素组 E_1，E_2，E_3，E_4 与 E'_1，E'_2，E'_3，E'_4 必有某种共性，交比就是这样的共性。

设在一个一维基本形中，元素 $E_i(i=1,2,3,4)$的齐次坐标是$(x_0^{(i)}, x_1^{(i)})$，用(E_i, E_j)表示行列式

$$\begin{vmatrix} x_0^{(i)} & x_1^{(i)} \\ x_0^{(j)} & x_1^{(j)} \end{vmatrix}$$

则称

$$(E_1, E_2; E_3, E_4) = \frac{(E_1, E_3)}{(E_2, E_3)} \Big/ \frac{(E_1, E_4)}{(E_2, E_4)} \tag{11.3}$$

为四个元素 E_1，E_2，E_3，E_4 的**交比**。

交比经过射影变换后保持不变，所以它是一个射影不变量，因若

$$\rho x'_i = \sum_{j=0}^{1} c_{ij} x_j (i = 0, 1)$$

$$\det(c_{ij}) = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$(E'_i, E'_j) = |c_{ij}|(E_i, E_j)\frac{1}{\rho^2}$$

于是

$$(E'_1, E'_2; E'_3, E'_4) = \frac{(E'_1, E'_3)}{(E'_2, E'_3)} \Big/ \frac{(E'_1, E'_4)}{(E'_2, E'_4)}$$

$$= \frac{\frac{\det(c_{ij})}{\rho^2}(E_1, E_3)}{\frac{\det(c_{ij})}{\rho^2}(E_2, E_3)} \Big/ \frac{\frac{\det(c_{ij})}{\rho^2}(E_1, E_4)}{\frac{\det(c_{ij})}{\rho^2}(E_2, E_4)}$$

$$= \frac{(E_1, E_3)}{(E_2, E_3)} \bigg/ \frac{(E_1, E_4)}{(E_2, E_4)} = (E_1, E_2; E_3, E_4)。$$

在欧氏空间中，若 P_1, P_2, P_3, P_4 是四个共线点，用 P_i, P_j 表示由 P_i 到 P_j 的有向线段长，则因 $(P_i, P_j) = P_iP_j$，有

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = \frac{P_1P_3}{P_2P_3} / \frac{P_1P_4}{P_2P_4}。$$

在欧氏平面上，若 p_1, p_2, p_3, p_4 是四条共点线，用 p_ip_j 表示由 p_i 到 p_j 的有向角，则

$$(p_1, p_2; p_3, p_4) = \frac{\sin(p_1p_3)}{\sin(p_2p_3)} / \frac{\sin(p_1p_4)}{\sin(p_2p_4)}。$$

利用交比还可以证明笛沙格定理和巴卜士定理，以及证明初等几何中的一些定理。

例 2 完全四角形和完全四边形

设 A, B, C, D 是射影直线 l 上四个不同的点，如果 $(A, B; C, D) = -1$，则称 A, B, C, D 是**调和点列**，或者叫做 A, B 被 C, D **调和分割**。

完全四边形是完全四角形的对偶图形，所以，我们只需讨论完全四角形。

完全四角形由任三点不共线的四个顶点 A, B, C, D 和它们两两相连的六条直线：AB，CD；AD，BC；AC，BD 组成。

完全四角形的任一边上，它的两个顶点被这一边的一个对边点及这一边与其他两个对边点连线的交点调和分割。(图 11.8)

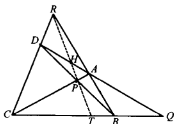


图 11.8

证 以 BC 边为例，现在要证明 $(C, B; T, Q) = -1$，令 $x = (C, B; T, Q)$，由 R 点投影到 AD 上，有

$$x = (C, B; T, Q) = (D, A; H, Q)$$

再由 P 点投影到BC 上，有

$$(D, A; H, Q) = (B, C; T, Q)$$

而

$$(B, C; T, Q) = \frac{BT}{CT} \Big/ \frac{BQ}{CQ} = \frac{1}{\frac{CT}{BT} \Big/ \frac{CQ}{BQ}} = \frac{1}{(C, B; T, Q)}$$

所以，$x = \frac{1}{x}$，$x^2 = 1$，$x = \pm 1$，由于 T, Q 分割C, B，故 $x < 0$，于是 $x = -1$。

六、二次曲线

拓广平面上的二次曲线

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$$

的齐次方程是

$$\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji}) \tag{11.4}$$

式中 $a_{ij} = a_{ji}$表明(a_{ij})是对称方阵。

在射影平面上方程(11.4)所确定的点的轨迹就叫做一条**二阶曲线**，与此相对偶，含线坐标的齐二次方程

$$\sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}u_iu_j = 0 \qquad (b_{ij} = b_{ji}) \tag{11.5}$$

代表一个直线集合，叫做二级曲线。

由于二级曲线是二阶曲线的对偶形式，故只讨论二阶曲线。

用 Γ 表示二阶曲线(11.4)，并假定$|a_{ij}| \neq 0$，在它上面一点$(y) = (y_0, y_1, y_2)$；Γ 在(y)处的切线方程为

$$\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}y_ix_j = 0, \tag{11.6}$$

这些切线构成二级曲线

$$\sum_{i,j=0}^{2} A_{ij}u_iu_j = 0$$

其中 A_{ij}是 a_{ij}的代数余子式。

设 P 不在满秩二阶曲线 Γ 上，经过 P 作直线 l 交 Γ 于 P_1，P_2 两点，设在 l 上，P 点关于 P_1，P_2 的调和共轭点是 P'，即$(P_1, P_2; P, P')=-1$，当 P 固定时，让 l 绕着 P 转动时，P 点的共轭点 P' 总是在一条直线 p 上，p 就叫做 P 关于 Γ 的极线，而 P 就叫做直线 p 关于 Γ 的极点(图 11.9)，特别地，当 p 在 Γ 上，p 就是 Γ 在 P 处的切线。显然若 P 的极线经过点 P'，则 P' 的极线经过 P 点。若 P 和 p 的齐次坐标为(x)与(u)，则

$$\rho u_i = \sum_{j=0}^{2} a_{ij} x_j = 0 \qquad (i = 0,1,2) \tag{11.7}$$

这是一种特殊射影对应，这种对应称为配极对应。

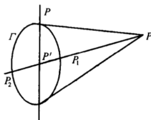


图 11.9

二阶曲线还可以通过射影对应来产生，若在平面上有两个射影对应的线束，它有两个不同的中心，且它们的公共直线不对应于它自己，则两线束中对应直线的交点的轨迹是一条满秩的二次曲线。

射影几何学中，关于二次曲线的一个最早的著名定理就是帕斯卡在 16 岁发现并证明的定理。

帕斯卡定理 满秩二阶曲线的一个内接六边形 $ABCDEF$ 的三对边 AB 和 DE，BC 和 EF，CD 和 FA 交点在一条直线上。(图 11.10)

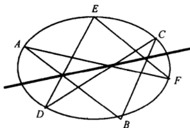


图 11.10

帕斯卡定理的对偶形式由布里安桑(Brianchen)在166年之后发现并证明：布里安桑定理，若二级曲线的六条切线作为六边形的边，则顶点的连线共点。

值得说明的是，就帕斯卡定理而言，变化之多，世所罕见：

1）六个点可以构成60个不同的六点形，因而有60条不同帕斯卡线。

2）若其中出现两点重合，还有五边形、四边形、三边形的帕斯卡定理。

3）如果二阶曲线退化为两条相交的直线，帕斯卡定理就变成巴卜士定理。所以帕斯卡定理是巴卜士定理的推广。

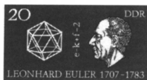
这个六边形被誉为“神奇的六边形”，正像帕斯卡自己曾说过的那样，从这个定理可以导出400多个推论。

参考文献

冯克勤.1987.射影几何趣谈.上海:上海教育出版社
梅向明.1983.高等几何.北京:高等教育出版社
苏步青.1991.高等几何学五讲.上海:上海教育出版社
朱德祥.1983.高等几何.北京:高等教育出版社

12 橡皮膜上的几何学——拓扑学

拓扑学有人说是“橡皮几何学”，它研究的也是点、线和面等图形，但是所讨论的图形可以改变大小和形状。拓扑学就是研究图形经过拓扑变换后的不变性质的学科，这里的拓扑变换形象地说是一种既不撕破也不黏合、但允许将图形伸缩和弯曲的变换，通俗地说，橡皮筋或橡皮膜的伸缩变形就是一种拓扑变换。儿童玩的气球，如果球面上有一些花纹包括有圆形花纹等，把它吹胀了，只要不破，虽然花纹的形状有变化，如圆可能变为椭圆，其花纹的长度、面积、共线性等都会改变，但气球和吹胀的气球面上的花纹之间仍有一一对应关系并且邻近的点仍变成邻近的点，这时变换和逆变换都是连续的，这样的变换便是拓扑变换或同胚。如果在圆的内部画一点，不管你怎样拉或吹胀这一橡皮膜制成的气球，点总是在圆的内部，这便是拓扑学的一种简单的不变性质。



欧拉与多面体公式

早在欧拉或更早的年代，就已有拓扑学的萌芽，欧拉多面体公式(即凸多面体中，若 v 是顶点个数，f 是面的个数，e 是棱的个数，则 $v+f-e=2$)更是拓扑学的先声，但这并非是拓扑学真正的开端，1895 年庞加莱(H. Poincaré，1854～1912)的著作《位置分析》开始了对拓扑学的系统研究，由于他奠基性的工作，拓扑学走上了宽广的道路，众多的数学家进入了这个领域，使得拓扑学成为本世纪最丰富多彩的一个数学分支，并成为近代数学的“新三高”(即抽象代数、拓扑学和泛函分析)之一。

拓扑学可分为两个分支：点集拓扑和组合拓扑(包括代数拓扑和微分拓扑)。前者是把几何图形看做点的集合，再把集合看做一个用某规律连接其中元素的空间(拓扑空间)等更一般的拓扑学观点；后者把几何图形看做由一些基本构件所组成(如同用砖砌墙一样)，用代数工具组合这些构件，并研究图形在同胚(包括微分同胚等)下的不变性质，这与拓扑学史上较早的观点相关；其实，这种划分仅仅为了方便，并不那么合乎逻辑。


庞加莱

一、拓扑学的基本研究对象

拓扑学里的图形是什么样的？正像欧氏几何的图形是刚体运动下保持不变的

图形，射影几何的图形是射影变换下可以互变的图形，拓扑学里的图形也是拓扑变换下可以互变的图形，那么哪些是拓扑图形？如果图形 X 通过弯曲、伸缩，而没有撕裂也没有黏合(即拓扑变换)变形为 Y，则称两个图 X 与 Y 是拓扑等价或同胚，通常互相同胚的图形被看做同一种图形。正像射影几何中圆、椭圆、双曲线和抛物线都可看做同一图形即圆锥曲线。

例如：

(1) 一块橡皮膜的方形，在适当的拉伸紧缩下可以变成三角形、圆、椭圆等各种图形，虽然形状和大小发生了明显的变化，但是，不管怎么去作这种拓扑变换，图形仍然只有一条道路 $ABCDA$，并且，从道路上任何一个地方出发，都会回到出发点，且中间不和这条道路交叉。在拓扑学里，所有这些图形有相同的名称即简单闭曲线(或闭合道路)(图 12.1)

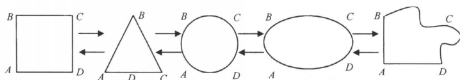


图 12.1

(2) 一个橡皮球，在适当的拉伸紧缩(拓扑变换)下可以变形成立方体的表面、椭球面、象形面等闭曲面，因为这类曲面把空间分成一个内部和一个外部，从内部一点到它的外部所走的道路或者所作的线，和这曲面一定交于一点。这类没有洞的闭曲面有相同的名称即简单闭曲面(图 12.2(a))。有洞的闭曲面(如图 12.2(b))。

A 和 B 黏合在一起，便得到一个新图形即闭曲线 (图 12.3)，故拓扑变换不允许切割、撕裂、黏合或者穿孔。

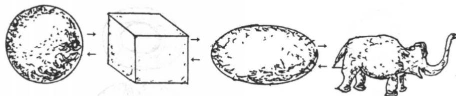


图 12.2(a)



图 12.2(b)



图 12.3

在拓扑学中立体的或平面的图形，通常根据需要切几次才能把它变成简单曲线或简单曲面来进行分类。这里**简单曲线**包括简单闭曲线和与线段 AB 同胚的曲线，而**简单曲面**包括简单闭曲面和与圆片曲面同胚的曲面。

就闭曲面而言，球面与环面就是根本不同的两种曲面，如果沿着球面上每一条闭曲线切开橡皮球，则球面将被分割成两块互不连接的部分(图 12.4)，而在环面上不是每条闭曲线都能把环面分成两部分(图 12.5)。



图 12.4

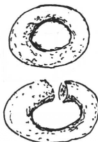


图 12.5

简单曲面上的任一闭曲线总把它分割成两部分，而简单闭曲面把空间分成两部分即内部和外部，且以该曲面为这两个部分的公共边界。另外，这些曲面中的每一个都有两侧：外侧与内侧，这种双侧性在同胚下也是不变的。1858 年德国数学家默比乌斯(1790～1868)有一个惊人的发现：存在只有一侧的曲面。这种曲面中最简单的一个称为默比乌斯带，它的样子像一顶交叉帽，其做法很简单：取一段矩形长纸条□*ABCD*，把一端，如 *AB* 端扭转 180°，然后把纸条的两端黏合在一起(图 12.6)。

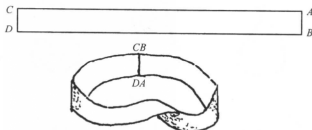


图 12.6

假定一只蚂蚁从默比乌斯带上任何一点出发，它可以爬到其他任何一个点上去，而且不必翻越带的边缘(图 12.7)，这与一只蚂蚁在球面或是在桌面上爬行的情况不同。默比乌斯带不分内侧、外侧，或者上面、下面，或者正面、反面。此外这个单侧曲面使我们对于左右分别的物体(如鞋子和手套)获得一种新的看法，即顺着默比乌斯带移动如左手套的图形，当移到原出发点时，手套就会上下颠倒变成右手套的图形，并且默比乌斯带的边界是由单独一条闭曲线所组成。一个类似的问题：是不是存在单侧闭曲面？克莱因于 1882 年发现了一种和默比乌斯带相似的单侧三维图形叫做克莱因瓶。设想把两个麦比乌斯带沿着边界黏合起来便得到克莱因瓶(图 12.8)。可以证明单侧曲面与双侧曲面是不同胚的。

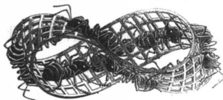


图 12.7 埃歇尔笔下的默比乌斯带

拓扑学主要研究连续性、变化的连续性，意思是把邻近的点变成邻近的点，因此图形必须具有某种结构以表现点与点之间的邻近关系。规定了每两点间距离并用距离大小来表示邻近关系的点集称为度量空间，最简单的例子是欧氏空间。

然而在某些场合未必能规定出合用的距离，因而产生了拓扑空间与连续映射、同胚等概念，它们都是拓扑学的基本研究对象，下面给出其中几个重要的严格定义：

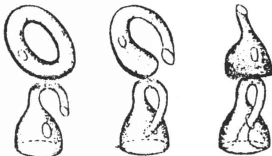


图 12.8 克莱因瓶

设 X 是一个集合，如果 X 的一个子集族 $\mathscr{T}$ 满足下列条件：

(1) X 与空集 ϕ 属于 $\mathscr{T}$；

(2) $\mathscr{T}$ 中任意有限个集合的交集属于 $\mathscr{T}$；

(3) $\mathscr{T}$ 中任意个集合的并集属于 $\mathscr{T}$。

则称 $\mathscr{T}$ 是集合 X 上的一个**拓扑**，X 与 $\mathscr{T}$ 一起称为**拓扑空间**，记为 $(X, \mathscr{T})$，$\mathscr{T}$ 中的集合称为该拓扑空间的**开集**。

设 x 是拓扑空间 X 中的一点，N 是 X 的子集，如果存在开集 U，使得 $x \in U \subset N$，则称 N 为**点 x 的邻域**。

设 X 和 Y 是拓扑空间，f 是 x 到 y 的映射，又 $x \in X$，如果对 $f(x)$ 的任意邻域 V，都存在 x 的邻域 U，使得 $f(U) \subset V$，则称 f 在点 x 处连续。如果 f 在 X 的每一点都连续，则称 f 是 X 到 Y 的**连续映射**。如果连续映射 f 是一一对应且 f 的逆映射连续，则称 f 为同胚，这时称空间 **X 和 Y 是同胚的**。

二、拓扑性质与拓扑不变量

(一) 基本概念

假定赋予几何图形 A 一些性质和量，如果某性质或量在每一个拓扑变换下都保持不变，就称之为 A 的**拓扑性质**(即拓扑不变性)或**拓扑不变量**，例如单侧性、双侧性、内部变内部、外部变外部的性质就是最简单的拓扑性质，而欧拉多面体公式中的数 $v - e + f$(也叫做欧拉示性数)则是拓扑不变量。

(二) 定理与例子

这里列举一些最基本而又重要的拓扑性质和拓扑不变量。

1. 连通性及其重数

如果图形 X 中任意两点 p 与 q，都能用 X 中一条道路连接，即存在连续映射 $f:[0,1]\to X$ 使 $f(0)=p$，$f(1)=q$，则称 X 是连通的(更确切地说是道路连通)。

作为两个不同胚图形的另一个例子，我们考虑下列两个平面图形。

图 12.9(a)中任一条封闭曲线都能连续地“收缩”成图形中一点，具有这种性质的图形称为**单连通区域**。不是单连通的区域称为**多连通区域**，图 12.9(b)显然

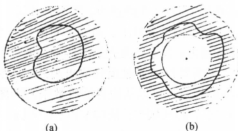


图 12.9

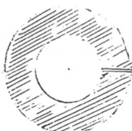


图 12.10

是多连通的，对于图 12.9(b)，如果沿半径切开所得到的区域便是单连通的。更一般地，我们能作出带有两个、三个或更多个“洞”的区域，如图 12.11，必须作两次切割才能化为单连通区域，称此区域为**二重连通域**。如果必须作 $n-1$ 次彼此不交的、从边界到边界的切割，才能把给定多连通区域 D 化为单连通区域，则称 D 为 $\boldsymbol{n}$ **重连通的**。平面上一个区域的连通性重数是这个区域的一个重要的拓扑不变量。图 12.9(a)是一重连通域，12.9(b)是二重连通域，而图 12.11 则是三重连通域。重数不同的连通域不可能同胚，当连通域对应的图形是曲面时，可以得到单连通曲面、多连通曲面，比如足球、花园里浇水的橡皮管、纸板、无柄茶杯就是单连通曲面，而外套衣、车轮内胎便是双连通曲面，长袖羊毛衫则是三连通曲面。

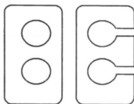


图 12.11

2. 维数问题

维数是刻画几何图形拓扑性质的一种数，通俗地说，它是确定整个图形中点

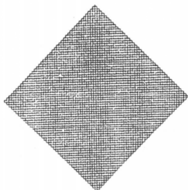


图 12.12 皮亚诺曲线

位置所需要的坐标(或参数)的个数，它是拓扑不变量，所以同胚的图形具有相同的维数。

上面的通俗说法是含混而带描述性的。皮亚诺(Peano)令人吃惊地构造了一条能填满正方形的“曲线”，(图 12.12)，曲线的维数是 1，它却填满了正方形，故它的维数是 2。这是不合情理的，深入研究维数的真正内涵。仅就简单情形作直观的考察，直线段 AB 的一维特点为：其边界是两点 A 和 B 为零维，如点 x 限在线段内运动，则走不出 AB 之外(图 12.13(a))，但若将它放在平面内，则 x 可绕过边界 A 或 B 到线段外面去；圆盘 D 的二维特点为：其边界圆周 C 为一维，D 内点 P 若限于平面内，则跑不出 D(图 12.13(b))，但在空间中，P 可以越过 C 到 D 外去；鸡蛋内部区域的三维特点为：其边界蛋壳是二维的，蛋黄不通过蛋壳是取不出来的，但在四维空间内，蛋黄可以不通过蛋壳取出来，这是令人惊讶的事。依此类推，如果规定空集的维数是 -1，可以从边界的维数来判断图形的维数，即如果对于每一个 $x\in X$，存在含 x 的区域 V，使 $(\partial V)\cap X$ 是 $(n-1)$ 维，且 X 不是任何更低维的，则称图形 X 为 n 维的，其中 ∂V 表示 V 的边界。

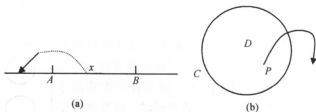


图 12.13

已经知道，直线段是一维、平面是二维，但是有一种图形，虽说本质上是一维的，但却密密麻麻地分布着，其维数虽不到 2，却似乎大于 1。例如，一棵老柏树，分叉又分叉，十分繁茂，每一枝条，似乎是一维，但集中起来，好像较一维要多些。这种现象也出现在：十分弯曲的海岸线，臭水沟中附着的污染物以及非线性分析的许多问题中，这里的对象的维数是分数，它的进一步研究属于 20 世纪 80 年代新发展起来的分形几何。

3．曲面有亏格

二维曲面是拓扑学研究得最多的曲面之一，亏格是二维曲面最典型的拓扑不

变量，形象地说，它相当于球面上连接了若干个柄，而柄的个数 q 就是相应曲面的亏格，严格定义也容易给出，考虑这样的问题：在给定的曲面上至多能画出几条互不相交而又不能把曲面分开的闭曲线？在球面上这样的闭曲线一条没有；在环面上这样的闭曲线至多只有一条；在有两个“洞”的曲面上，这样的闭曲线至多有两条(图12.14)，一般地，我们给出如下定义：

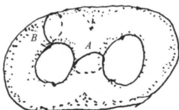


图 12.14

能在曲面上画出不把曲面分割开的互不相交的简单闭曲线的最多条数，称为曲面的亏格。球面的亏格为0，环面的亏格为1，有两个“洞”的曲面的亏格为2，类似地，带有 p 个“洞”的曲面的亏格为 p，亏格是曲面的一个拓扑性质，当曲面连续变形时，它仍保持不变。反之可以证明，如果两个闭曲面有相同的亏格，则可以把其中一个连续变形为另一个，所以从拓扑的观点来看，一个闭曲面的亏格 $p(=0,1,2,3,\cdots)$完全刻画了这个闭曲面的特征。例如，两个洞的面包圈和带有两个“环柄”的球面都是亏格为2的闭曲面，显然彼此同胚(图12.15)。带有 p 个洞的面包圈与带有 p 个“环柄”的球面是同胚的，因此，我们就用这样的球面作为亏格为 p 的闭曲面的拓扑代表。

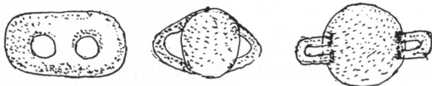


图 12.15

例1 多面体的欧拉公式

对一个简单多面体，记 v 为其顶点数，e 为其棱的数目，f 为其面的数目，笛卡儿和欧拉先后独立地发现：对任何多面体，公式 $v+f-e=2$ 总成立，此即为欧拉公式。

这里所谓“简单多面体”指一个没有“洞”的多面体，如立方体，$v=8$，$f=6$，$e=12$；显然有 $v+f-e=8+6-12=2$。

例2 不动点定理

何为不动点定理？张景中院士曾通俗地描述：

设想把一根橡皮条拉长，拉长到1米，两端固定在一根米尺的两端．米尺上是有刻度的：1厘米，2厘米，…于是，可以在橡皮条上也画上记号。橡皮条上的每个点对应于一个数 x。x 在0与100之间。手一松，橡皮条自然会缩短，把缩短了的橡皮条仍然放在尺子上，再按照尺子上的刻度在每个点作记号 y，y 与原来

的x就对应起来，记缩短变换为f，$y=f(x)$。

从拉长到缩短，橡皮条上的每个点的位置都经历了一次变化，一个运动，从x变到y。这个运动可能很不规则，很难掌握。但是，数学家知道有一件事是确凿无疑的——橡皮条上至少有一个点，它的位置没有变化！或者说，这场剧烈运动的结果，它仍然在原处——巍然不动。即$x_0=f(x_0)$。

这就是线段上的不动点定理。

抛开橡皮条，从数学上说：如果一条线段，经过连续变换，但每个点都仍在这线段上。那么，一定有一个点位置不变。

数学家进一步研究，发现平面上也有不动点定理，比如，一幅画在绷紧了的橡胶薄膜上的中国地图。把周围的木框去掉，地图不再绷紧，它收缩变形，摆在原来的中国地图上。地图上的每一点都有了新的位置，北京也许到了兰州，上海说不定挪到了西安，海南岛爬上大陆。但是，不动点定理告诉我们，有一个地方肯定没有动。至于这个地方是郑州，是重庆，还是南京雨花台，那就不知道了，那要根据变动的具体情形而定。

在圆周上没有不动点定理。圆周自身稍转一下，所有的点都动了。但是，球面上却有不动点定理。

数学家不是气象学家。但是，根据球面上的不动点定理，数学家却敢断言，任何时候，地球上总有一个地方不刮风！同理知：每个人头发上至少有一个旋涡。

同样有圆盘上的不动点定理：若C为一个封闭的圆盘(含边界)，则每一个由C变到其自身的连续映射有一个不动点。

不动点是拓扑变换下的不变图形，所以数学家花了很大力气研究不动点，发现了各式各样的不动点定理。关于不动点的科学研究论文有上千篇之多。直到今天，它还是被继续研究的课题。

例3 四色问题

早在1852年英国人古斯里就提出了四色猜想。即在平面或球面上绘制地图，有公共边界线的区域用不同的颜色加以区别，只需要四种颜色就足够了，不过严格地说只要对正规地图证明四色猜想，也就证明了对一切地图的四色猜想。这里的正规地图是指：要其中没有三个以上的区域相交于一点，并且没有一个区域完全包围另一区域。这一猜想经过许多数学家的努力，直到1976年由美国数学家阿佩尔(K.Appel)和哈肯(W.Haken)借助于计算机花了1200小时才证明其正确性。四色问题的证明与拓扑学以及图论都密切相关，它在拓扑学里，我们可以把每一幅地图看成绷在球面上的(即不重叠地盖满球面的)一个闭多面体表面。地图上区域与区域的分界线即为闭多面体的棱，各分界线的交点为顶点，而每一区域是闭多面体的一个面。所以每一幅地图都有示性数。由欧拉多面体公式的广义思想可以推测：这个示性数为2。此外，这颜色数4是同胚下不变的，即与球面、平面同

胚的一切曲面上的地图着色都只要四种颜色即可。值得一提的是：如果不是平面或球面，而是在车轮内胎面上，对地图着色，四色就不够了，要七色才够。更一般地，我们可以讨论在各种拓扑曲面上的地图着色问题。

参 考 文 献

巴尔佳斯基,叶夫列莫维奇 .1987. 拓扑学奇趣 . 北京:北京大学出版社
克莱因 M.1979. 古今数学思想(1～4 册). 张理京，张锦炎译 . 上海:上海科学技术出版社
沃尔 .1988. 拓扑学的几何导引 . 季文铎,张增喜译 . 北京高等教育出版社
约翰逊,格伦 .1980. 拓扑学——橡皮膜上的几何学 . 刘远图译 . 北京:科学出版社

13　微分几何浅说

在我们生活的这个世界里，我们经常遇到各种形状的曲线和曲面，行星在空中的路线，轮船在海上的路线，炮弹在空中的路线，车辆在公路上留下的痕迹，笔尖在自动记录器纸带上的痕迹，美术图案的花纹，悬挂着的缆索的形状等。立体的表面，飞机机身的外壳，轮船船体的外壳，涡轮叶片，螺旋桨叶，薄壳屋顶，飞行头盔，冲压模具，乃至艺术雕塑等等。因此，研究曲线和曲面的几何性质就具有重要的实际意义了。在初等几何课里，只研究最简单的曲线：直线、折线、圆和圆弧，而对于曲面，除讨论平面以外，只讨论多面体、球、圆锥、圆柱等的表面。在解析几何课里，还研究另一些曲线：椭圆、抛物线、双曲线等以及二次曲面等一些最规范的曲线和曲面。但对于较为复杂的曲线和曲面的研究则是微分几何的任务了。微分几何是用微积分的概念和方法，特别是微分学与微分方程理论的概念和方法研究几何图形的学科，以下主要介绍经典微分几何，它研究三维欧氏空间中光滑曲线和曲面在一点邻近的几何性质，它在力学和一些工程问题(如弹性薄壳结构、齿轮等方面)中有广泛的应用，它的基本思想直接关系到人类对空间的根本理解，它标志了现代微分几何的诞生，并为爱因斯坦相对论提供了数学模型。下面就按曲线理论和曲面理论分别予以讨论。

一、曲　线　论

空间曲线的表示

1. 参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\,(a \leqslant t \leqslant b) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{13.1}$$

表示一条空间曲线，其中(x, y, z)表示曲线上一点在右手直角坐标系下的坐标，t是参数。

如果把t看成时间，那么曲线可以看成空间质点从时刻a到b之间的运动轨迹。不过，一般来说，t不具有时间这个物理意义，而且它的选择不是惟一的。

例 1 圆柱螺旋线

当空间一动点绕 z 轴做等速旋转，并沿 z 轴方向做匀速移动时，它所运动的轨迹就是圆柱螺旋线。

设 ω 为动点 P 绕 z 轴旋转速度(角速度)，r 为圆柱的半径，v 为 P 沿 z 轴的运动速度，由图 13.1 可得

$$\begin{cases} x = r\cos\omega t \\ y = r\sin\omega t \ (-\infty < t < +\infty) \\ z = vt \end{cases} \tag{13.2}$$

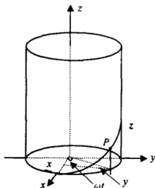


图 13.1

2. 向量方程

设右手直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标基向量是 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$。如记 $\vec{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = \{x, y, z\}$，$\vec{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$，则式(13.1)的向量形式为

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b \tag{13.3}$$

或

$$\{x, y, z\} = \{x(t), y(t), z(t)\}, \quad a \leqslant t \leqslant b \tag{13.4}$$

3. 切向量

设曲线 C 的向量方程为 $\vec{r} = \vec{r}(t)$，$a \leqslant t \leqslant b$。$P_0$ 为 C 上对应于参数 t_0 的点，在 P_0 附近任取一点 P，P 对应于参数 $t_0 + \Delta t$，过 P_0，P 引割线 P_0P，当 P 沿着 C 趋近于 P_0 时，割线 P_0P 的极限位置 P_0T 称为曲线 C 在 P_0 处的切线(图 13.2)。

现在我们来求向量 $\overrightarrow{PT}$。

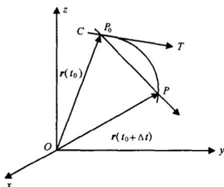


图 13.2

$\overrightarrow{P_0P}=\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)=\Delta\vec{r}$为弦 P_0P 上的一个向量。当 P 沿着 C 趋于 P_0 时，$\Delta t\to 0$，同时，由于 $\vec{r}(t)$是连续的向量，$|\overrightarrow{P_0P}|$也趋于零，不过，向量

$$\frac{\overrightarrow{P_0P}}{\Delta t}=\frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

也是弦 P_0P 上的一个向量，当 $\Delta t\to 0$ 时，它的极限如果不是零，就可以代表 C 在P_0 的切线方向。此时，称$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$为$C$ 在P_0 处的切向量，记作$\vec{r}\,'(t_0)$，$\vec{r}\,'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$。曲线上具有切向量的点叫做正则点。

4. 自然参数

由微积分可知，曲线 C 上从$P_0(t_0)$到 $P(t)$的弧长 $S(t)=\int_{t_0}^{t}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\ \mathrm{d}t$，而 $r'(t)$ 的模 $|\vec{r}\,'(t)|=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}$。于是

$$S(t)=\int_{t_0}^{t}|\vec{r}\,'(t)|\,\mathrm{d}t \tag{13.5}$$

由于$\vec{r}\,'(t)\neq 0$，故$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}>0$，因此，$S=S(t)$有反函数 $t=t(s)$，这样式(13.1)改用弧长 s 作参数

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=\vec{r}(t(s))$$

仍然记作

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \tag{13.6}$$

s 称为自然参数，式(13.6)叫自然方程。习惯上，$\vec{r}'(s)$ 常记作 $\dot{\vec{r}}(s)$，而且 $|\dot{\vec{r}}(s)| = 1$，切线方向为

$$\vec{\rho} = \vec{r}(t_0) + (t - t_0)\vec{r}'(t_0) \tag{13.7}$$

5. 曲线的局部性质

过 P_0 点且垂直于切线的平面称为 C 和 P_0 点的法平面，法平面方程为

$$\vec{r}'(t_0)(\vec{\rho} - \vec{r}(t_0)) = 0 \tag{13.8}$$

6. 密切平面

曲线 C 在 P_0 处的切线及 C 上邻近点 P 确定一个平面 σ，当 P 沿着 C 趋近于 P_0 时，σ 的极限位置称为曲线 C 在 P_0 点的密切平面。它在 P_0 点的法线称为 C 在 P_0 点的次法线。曲线 C 在 P_0 点的切线与次法线所决定的平面称为曲线 C 在 P_0 点的从切平面，它在 P_0 点的法线称为曲线 C 在 P_0 处的主法线(图 13.3)。

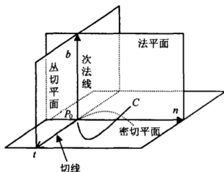


图 13.3

7. 曲率

设 $\vec{r} = \vec{r}(s)$，$0 \leqslant s \leqslant l$ 是曲线 C 的自然参数方程。现在我们关心的问题是：这条曲线是怎样“弯曲”的？例如钟表里的一盘发条，越往里圈弯得越厉害，这是日常生活中人们对曲线弯曲程度的定性认识。在数学上给“弯曲”概念以定量描述就是曲率。为了把曲率定义得合理，它必须至少满足如下两个要求

$$\vec{n}(s) = \frac{\ddot{\vec{r}}(s)}{|\ddot{\vec{r}}(s)|}$$

$$\vec{b}(s)=\dot{\vec{r}}(s)\times\vec{n}(s)$$

密切平面方程$((\dot{\vec{r}}(s)\times\ddot{\vec{r}}(s))\cdot(\vec{\rho}-\vec{r}(s))=0$

1）由于直线是毫无弯曲的曲线，它的曲率应该处处等于0；

2）圆是一条均匀弯曲的曲线，它的曲率应该处处相同。

对直线来说，其切线正好就是它自身，所以任何两点的切线的夹角都是0。对于圆来说，其上任何两点的切线夹角与这两点间弧长成正比。因此，曲率应该用切线夹角与弧长之比的极限定义。

设切向量$\dot{\vec{r}}(s)$与$\dot{\vec{r}}(s+\Delta s)$的夹角为$\Delta\alpha$(图13.4)，称

$$k(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| \tag{13.9}$$

为曲线C在$\vec{r}(s)$处的曲率。因为

$$|\dot{\vec{r}}(s)|=|\dot{\vec{r}}(s+\Delta s)|=1$$

$$|\Delta\dot{\vec{r}}|=|\dot{\vec{r}}(s+\Delta s)-\dot{\vec{r}}(s)|=2a=\left|2\sin\frac{\Delta\alpha}{2}\right|$$

$$\left|\frac{\Delta\dot{\vec{r}}}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}{\frac{\Delta\alpha}{2}}\right|\ \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

于是

$$|\ddot{\vec{r}}(s)|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\dot{\vec{r}}}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=k(s) \tag{13.10}$$

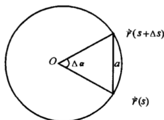


图13.4

当曲线C不是用自然参数而是用普通参数t表示时，

$$k(s)=\left|\frac{d\dot{\vec{r}}}{ds}\right|=\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\times\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|=\left|\vec{r}'\frac{dt}{ds}\times\left(\vec{r}''\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\vec{r}'\frac{d^2t}{ds^2}\right)\right|=$$

$$|\vec{r}'\times\vec{r}''|\left|\frac{dt}{ds}\right|^3=\frac{|\vec{r}'\times\vec{r}''|}{\left|\frac{ds}{dt}\right|^3}=\frac{|\vec{r}'\times\vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3} \tag{13.11}$$

8. 挠率

平面曲线上任一点的密切平面就是这条曲线所在的平面。因此，平面曲线的单位次法线向量 $\vec{b}=\dfrac{\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}}{|\ddot{\vec{r}}|}$ 是常向量。所以次法线向量 $\vec{b}$ 的变差就是密切平面变差的一种度量。用 $\Delta\beta$ 表示曲线 C 上点 $P(s)$ 与 $P(s+\Delta s)$ 处次法线的向量 $\vec{b}(s)$ 与 $\vec{b}(s+\Delta s)$ 的夹角。则称极限

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\beta}{\Delta s}=\tau(s) \tag{13.12}$$

为 C 在 $P(s)$ 点的挠率。

仿照式(13.10)的证明可得

$$|\tau(s)|=|\dot{\vec{b}}(s)| \tag{13.13}$$

由 $\vec{b}(s)\cdot\dot{\vec{r}}(s)=0$，经对 s 微分得

$$\dot{\vec{b}}(s)\cdot\dot{\vec{r}}(s)+b(s)\cdot\ddot{\vec{r}}(s)=0$$

而 $\vec{b}(s)\cdot\ddot{\vec{r}}(s)=0$，故 $\dot{\vec{b}}(s)\cdot\dot{\vec{r}}(s)=0$。再由 $\vec{b}(s)\cdot\vec{b}(s)=1$ 关于 s 微分得 $\dot{\vec{b}}(s)\cdot\vec{b}(s)=0$，即 $\dot{\vec{b}}(s)$ 既垂直于 $\dot{\vec{r}}(s)$ 又垂直于 $\vec{b}(s)$，因而平行于 $\vec{n}(s)$，从而 $\dot{\vec{b}}(s)=-\tau(s)\vec{n}(s)$。所以

$$\tau(s)=-\dot{\vec{b}}(s)\cdot\vec{n}(s) \tag{13.14}$$

9. 曲线论的基本定理

曲线的弧长 s，曲率 $k(s)$ 和挠率 $\tau(s)$ 是运动的不变量。反过来，曲线的曲率和挠率完全决定了曲线的形态。具体地说，如果给定了两个连续函数的 $k(s)>0$ 和 $\tau(s)$，$s\in[0,l]$，则存在以 $k(s)$ 和 $\tau(s)$ 分别为其曲率和挠率的曲线，并且这些曲线经过空间的一个运动可以互相叠合。

10. 活动标架、弗雷奈(Frenet)公式

曲线 $\vec{r}=\vec{r}(s)$，$0\leqslant s\leqslant l$ 上每一点有三个互相垂直的单位向量 $\vec{t}(s)$，$\vec{n}(s)$，$\vec{b}(s)$，它们构成了曲线的活动坐标架。由基本定理可知，这个活动标架完全刻画了曲线的形态。因此，为了更深刻地研究曲线的局部性质，就必须研究 $\vec{t}(s)$，$\vec{n}(s)$，$\vec{b}(s)$ 的变化，下面的弗雷奈公式就全面地描绘了当 P 点在曲线上移动时，

活动坐标架的运动规律。

弗雷奈公式	$\frac{d\vec{t}}{ds}=k(s)\vec{n}(s)$ $\frac{d\vec{n}}{ds}=-k(s)\vec{t}(s)+\tau(s)\vec{b}(s)$ $\frac{d\vec{b}}{ds}=-\tau(s)\vec{n}(s)$

因为$\frac{d\vec{t}}{ds}=\ddot{\vec{r}}(s)=|\ddot{\vec{r}}(s)|\frac{\ddot{\vec{r}}(s)}{|\ddot{\vec{r}}(s)|}=k(s)\vec{n}(s)$，由于 $\vec{t}$、$\vec{n}$、$\vec{b}$ 是两两正交的单位向量，因此有 $\vec{t}\cdot\vec{t}=\vec{n}\cdot\vec{n}=\vec{b}\cdot\vec{b}=1,\vec{t}\cdot\vec{n}=\vec{n}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{t}=0$，微分得$\dot{\vec{t}}\cdot\vec{t}=\dot{\vec{n}}\cdot\vec{n}=\dot{\vec{b}}\cdot\vec{b}=0,\dot{\vec{t}}\cdot\vec{n}=-\vec{t}\cdot\dot{\vec{n}},\dot{\vec{n}}\cdot\vec{b}=-\vec{n}\cdot\dot{\vec{b}},\dot{\vec{b}}\cdot\vec{t}=-\vec{b}\cdot\dot{\vec{t}}$。令$\dot{\vec{n}}=\alpha_1\vec{t}+\beta_1\vec{n}+\gamma_1\vec{b},\dot{\vec{b}}=\alpha_2\vec{t}+\beta_2\vec{n}+\gamma_2\vec{b}$，由 $\dot{\vec{n}}\cdot\vec{n}=\beta_1=0$，又由 $\dot{\vec{t}}\cdot\vec{n}=-\vec{t}\cdot\dot{\vec{n}}$ 得 $\alpha_1=-k(s)$，由$\dot{\vec{n}}\cdot\vec{b}=-\vec{n}\cdot\dot{\vec{b}}$得$\vec{\gamma}_1=-\vec{\beta}_2$，由$\dot{\vec{b}}\cdot\vec{b}=0$ 得$\vec{\gamma}_2=0$，又由$\dot{\vec{b}}\cdot\vec{t}=\vec{b}\cdot\dot{\vec{t}}$得 $\alpha_2=-\vec{b}(s)\cdot k(s)\vec{n}(s)=0$，$\dot{\vec{b}}=\beta_2\vec{n}$。按照挠率的定义得 $\tau=-\beta_2$。

二、曲 面 论

1827 年被誉为欧洲数学家之王的 50 岁的德国大数学家高斯正式发表了《曲面上的一般研究》的论文，他在论文中建立了曲面的内在几何学，奠定了曲面论的基础。曲面论的任务是研究光滑曲面在一点附近的几何性质(如弯曲性，大致形状等)。



50 岁的高斯

(一) 曲面概念及其表示

立体的表面，飞机机身的外壳、薄壳屋顶等等都不是数学曲面，数学曲面的概念是在舍弃了厚薄以及物质性，注重确定物体表面的精确位置而抽象出来的。

1. 简单曲面及其参数表示

简单曲面是指平面上的初等区域 D 通过一一的、双方连续在上的映射在三维欧氏空间中的像 S，其中初等区域为平面上不自交的闭曲线的内部。

空间解析几何知：在空间直角坐标系下，曲面 S 有以下几种表示

(1) 显式方程 $z=f(x,y)$；

(2) 隐式方程 $F(x,y,z)=0$;

(3) 参数方程

坐标式参数方程 $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v)\in D \\ z = z(u,v), \end{cases}$

向量式参数方程

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = \{x(u,v), y(u,v), z(u,v)\} \tag{13.15}$$

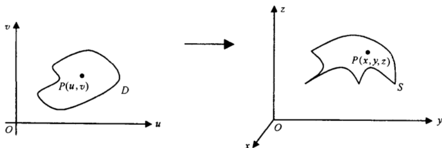


图 13.5

对于曲面 S 的方程以后都采用式(13.15)来讨论，而初等区域 D 所在平面上的坐标直线 $v=$ 常数或 $u=$ 常数，在曲面上的像称为曲面的坐标曲线，分别叫做 u 曲线和 v 曲线，方程为

$$u \text{ 曲线}\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}(u,v) \\ v = v_0 \end{cases}, \qquad v \text{ 曲线}\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}(u,v) \\ u = u_0 \end{cases}$$

这两组坐标曲线在曲面上构成所谓曲纹坐标网。

例 2

(1) 圆柱面：设 D 是长方形区域 $u=\theta$，$v=z$，$0\leqslant\theta<2\pi$，$-\infty<z<+\infty$，由解析几何的柱面坐标知：圆柱面的参数方程为

$$\vec{r} = \{R\cos\theta, R\sin\theta, Z\} \quad (0\leqslant\theta<2\pi,\ -\infty<z<+\infty,\ R \text{ 为截圆半径})$$

这时，θ 曲线(即 $Z=$ 常数)为垂直于 Z 轴的平面和圆柱面的交线圆，Z 曲线(即 $\theta=$ 常数)即为圆柱面上的直母线。

(2) 球面：由解析几何的球面坐标得：球面的参数方程为 $\vec{r} = \{R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\}\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ \theta\leqslant\varphi<2\pi,\ R \text{ 为球面的半径}\right)$，而 φ 曲线恰为纬线，θ 曲线为经线。

2. 光滑曲面

设曲面 S 的方程为 $\vec{r}=\{x(u,v),y(u,v),z(u,v)\}(u,v)\in D$，若 $x(u,v)$，$y(u,v)$，$z(u,v)$ 有直到 k 阶的连续偏导数，则称 S 为 k 阶正则曲面或称为 C^k 类曲面，特别地，C^1 类曲面又称为光滑曲面。这里的偏导数即指二元函数中将一个变元视为常数而对另一变元所求的导数(如 $x=x(u,v)=R\cos u\cos v$，$y=y(u,v)=R\cos u\sin v$，$z=z(u,v)=R\sin u$，这时关于 u 的偏导数 $\frac{\partial x}{\partial u}=R\cos v(-\sin u)$，$\frac{\partial y}{\partial u}=R\sin v(-\sin u)$，$\frac{\partial z}{\partial u}=R\cos u$，所以 $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}=\vec{r}_u=\{-R\sin u\cos v,-R\sin u\sin v,R\cos u\}$，其中求导时，一律视 $v=$ 常数，同法可求得 $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}=\vec{r}_v=\{-R\cos u\sin v,\ R\cos u\cos v,0\}$)，又设 $(u_0,\ v_0)\in D$，S 为光滑曲面，显然在 $\vec{r}(u_0,\ v_0)$ 点处的 u 线和 v 线的切向量为 $\vec{r}_u(u_0,\ v_0)$ 和 $\vec{r}_v(u_0,\ v_0)$，这时如果 $\vec{r}_u\times\vec{r}_v(u_0,\ v_0)\neq 0$，则称 $(u_0,\ v_0)$ 为曲面的正常点，正像光滑曲线在每一点处有切线，光滑曲面在每一点处有最密切的平面即切平面。在 $\vec{r}(u_0,\ v_0)$ 处的切平面可以看成是由 $P_0(\vec{r}(u_0,\ v_0))$ 以及 $P_1(\vec{r}(u_0,v))$，$P_2(\vec{r}(u,\ v_0))$ 三点所决定的平面当点 P_1 和 P_2 沿着 v 线，u 线趋于 P_0 时的极限位置，这时可由 P_0 以及 $\vec{r}_u$，$\vec{r}_v$ 决定切平面；当 $\vec{r}_u\times\vec{r}_v(u_0,v_0)\neq 0$ 时，可得惟一的切平面，切平面在切点 P_0 处的垂直线，也叫做曲面在 P_0 点处的法线，于是在正常点 P_0 处的法线也惟一，再假定曲面 S 上有一条过 P_0 的曲线 $\Gamma:\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t))$，$\Gamma$ 在 P_0 点处的切向量，由复合函数求导连锁规则得

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{t=t_0}=\vec{r}_u(u_0,\ v_0)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_{t=t_0}+\vec{r}_v(u_0,\ v_0)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)_{t=t_0}$$

式中，$u_0=u(t_0)$，$v_0=v(t_0)$。因此曲面上正常点 P_0 处的任意切线均在切平面上。

(二) 曲面的局部性质

1. 内蕴性质

(1) 曲面的第一基本形式

设曲面 $S:\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ 上的曲线 $\Gamma:u=u(t)$，$v=v(t)$(即 $\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t))$)，因为 $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)=\vec{r}_u\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)+\vec{r}_v\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)$，于是 $\mathrm{d}\vec{r}=\vec{r}_u\mathrm{d}u+\vec{r}_v\mathrm{d}v$，由曲线论知

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\,\vec{r}^2=[\vec{r}_u\mathrm{d}u+\vec{r}_v\mathrm{d}v]^2=\vec{r}_u^2\mathrm{d}u^2+2\,\vec{r}_u\vec{r}_v\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\vec{r}_v^2\mathrm{d}v^2$$

若记

$$E = \vec{r}_u^2 = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u, \quad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v, \quad G = \vec{r}_v^2 = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$$

便有

$$I = dS^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \tag{13.16}$$

式(1.2)称为曲面的第一基本形式，其中 E、F、G 称为曲面第一类基本量。

利用(1.2)可以计算曲面上一段曲线的长度，两相交曲线在交点处的夹角及曲面上一块区域的面积等，这些只用第一类基本量表示的曲面度量性质(即曲面的内蕴性质)公式表如表 13.1 所示。

表 13.1

曲面上曲线段$\overset{\frown}{A(t_0)B(t_1)}$的弧长	$S = \int_{t_0}^{t} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt$
曲面上 $\vec{r}(u_0, v_0)$处方向 $du:dv$ 和 $\delta u:\delta v$ 夹角	$\cos\theta = \frac{E du\delta u + F(du\delta v + \delta u dv) + G dv\delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}$
曲面上区域 D 的面积(D 为 D 对应的平面区域)	$\sigma = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dv du$

(2) 两点之间的距离与测地线

在曲面 S 上起着直线作用的是所谓测地线，在 S 上任取两点 P 和 Q，由 P 在 S 上走到 Q 的路径有很多，在一般情形下，最短的路径只有一条，这就是测地线(也叫短程线)。例如，航海人员在地球上由一地 P 航行到另一地 Q 采用的最短路线是球心 O 和 P、Q 所在的平面与球面所截的圆上一个较短的弧，测地线即由此得名。

一般情况下，过 S 上两点 P 和 Q 必有也只有一条测地线，P、Q 之间的弧长便是 P、Q 之间的距离。

有了两点的距离和两线的夹角，便可以研究曲面上的几何学了，比如曲面上的三角形便是三点 A、B、C 和过其中每两点的三条测地线所组成的图形(称为测地三角形)，于是可以建立与三角形相应的几何了。

2. 外在性质

(1) 曲面的第二基本形式

曲面在给定点 P 处的弯曲程度由曲面与 P 点的切平面的偏离程度决定，然而沿不同的切方向，曲面偏离切平面的情况可能有差异，因此，考虑 P 点的位置

向量$\vec{r}$沿某一个给定切方向 $du:dv$ 作微小变动时的改变量 $\Delta\vec{r}$，那么曲面与切平面在给定方向偏离程度可用 $\delta=\vec{n}\Delta\vec{r}$来描述(其中 $\vec{n}$为 P 点的法单位向量)，于是 $\vec{n}=\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}$，按照泰勒公式(略去二阶以上的项)

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r}&=\vec{r}(u+\Delta u,v+\Delta v)-\vec{r}(u,v)\\&=\vec{r}_u\Delta u+\vec{r}_v\Delta v+\frac{1}{2}[\vec{r}_{uu}(\Delta u)^2+2\vec{r}_{uv}\Delta u\Delta v+\vec{r}_{vv}(\Delta v)^2]\end{aligned}$$

于是

$$2\delta=L(\Delta u)^2+2M\Delta u\Delta v+N(\Delta v)^2$$

式中 $L=\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n}$，$M=\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n}$，$N=\vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}$，$\vec{r}_{uu}=\frac{\partial\vec{r}_u}{\partial u}$，$\vec{r}_{uv}=\frac{\partial\vec{r}_u}{\partial v}$，$\vec{r}_{vv}=\frac{\partial\vec{r}_v}{\partial v}$，当 Δu，$\Delta v\to 0$ 时，称 2δ 的主要部分

$$II=L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2 \tag{13.17}$$

为曲面的第二基本形式。L，M，N 称为曲面的第二类基本量。由于 $\vec{n}=\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}$，有 $L=\frac{(\vec{r}_u,\ \vec{r}_v,\ \vec{r}_{uu})}{\sqrt{EG-F^2}}$，$M=\frac{(\vec{r}_u,\vec{r}_v,\ \vec{r}_{uv})}{\sqrt{EG-F^2}}$，$N=\frac{(\vec{r}_u,\ \vec{r}_v,\ \vec{r}_{vv})}{\sqrt{EG-F^2}}$ 其中$(\vec{r}_u,\ \vec{r}_v,\ \vec{r}_{uu})$，$(\vec{r}_u,\ \vec{r}_v,\ \vec{r}_{uv})$，$(\vec{r}_u,\ \vec{r}_v,\ \vec{r}_{vv})$表示三个向量的混合积。由 $\vec{r}_u\cdot\vec{n}=\vec{r}_v\cdot\vec{n}=0$ 分别对 u，v 求导得$L=\vec{r}_u\cdot\vec{n}_u$，$M=\vec{r}_u\cdot\vec{n}_v=\vec{r}_v\cdot\vec{n}_u$，$N=\vec{r}_v\cdot\vec{n}_v$。

(2) 高斯曲率

曲面 S 在已知点处的高斯曲率是指$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$，而相应的平均曲率为

$$H=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}$$

根据高斯曲率的符号可以决定曲面在一点邻近的结构特点，见表 13.2。

表 13.2

K	点 P	曲面在 P 点邻近的形状
+	椭圆点	椭圆抛物面(碗状)
-	双曲点	马鞍面(马鞍状)
0	抛物点	其他情形

而高斯曲率的绝对值给出了从各个方向的曲率分布抽象出来的曲面的一般弯

曲程度，以下介绍高斯曲率的几何意义，它将使曲面的弯曲性变得很明显。

在曲面 S 上 P 点的周围随便画一个小圈 C，把 P 点包在内，C 上各点的球面象点在单位球面 S' 上也组成一个小圈 C'，把 P 的象点 P' 包在内，设 C 所围成的 S 的面积为 A，C' 所围成的 S' 的面积为 A'，A 及 A' 有同方向与反方向之别，可以如下决定：

假设有甲、乙两人，甲站在 S 上，由脚至头的方向即为甲所在点的法线的正向，乙站在 S' 上，由脚至头的方向即为乙所在点的法线正向，甲若在 C 上走，乙也始终走在甲的所在点 S' 上的 C' 上，甲绕 C 一周，乙便绕 C' 一周，当甲绕 C 时，C 的内部始终在甲的左边(或右边)，C' 内部也始终在乙的左边(或右边)，这时则称 A 和 A' 有同方向，$\frac{A'}{A}$ 便是正数。反过来，如果 C 的内部在甲的左边(或右边)，C' 的内部在乙的右边(或左边)，则称 A 和 A' 有反方向，$\frac{A'}{A}$ 便是负数。

现在让 C 在 S 上收缩到 P 点，C 所包围的面积 A 便收缩到零去。同时 C' 在 S' 上也收缩到 P' 点，C' 所包的面积 A' 也收缩到零，$\frac{A'}{A}$ 为一数，这个数叫做曲面 S 在 P 点的高斯曲率。

例 2

(1) 平面上每点处的高斯曲率都是零($K=0$)。

假设 S' 为一平面，故 S 上任一点的切平面便是 S 自己，S 上任一点的法线便是 S 在该点的垂线。因为平面的垂线都是互相平行的，所以 S 上所有的点在 S' 上对应象点都是同一点。因此 C' 便是一点，C' 所围的面积总是零，即 A' 等于零，故 $\frac{A'}{A}$ 总等于零。

(2) 半径为 r 的球面上，每一点的高斯曲率都是 $\frac{1}{r^2}$($K>0$)。

假设 S 和 S' 的球心重合于 O，设想球心 O 为一个太阳，向四面八方发光，这时 S 上一点 P 在 S' 上的影子便是 P' 点。因此 C' 便是 S 上的 C 在 S' 上的影子，球冠 A' 便是球冠 A 的影子，由极限观点得：A' 和 A 之比等于 S' 和 S 的半径的平方之比，即 $1:r^2$。

一般地，如果一曲面 S 在每一点处的高斯曲率都是一常数，则 S 称为常高斯曲率曲面，显然它有三种情形即 $K>0$，$K=0$，$K<0$。

关于 $K<0$ 的常高斯曲率曲面，例如：将曳物线(也叫追狗曲线，即假定一个人追一只狗，有一条长为 r 的绳子将人与狗连起来，开始的时候，人在狗的北面距离 r 的地方，狗向东边跑，人为了要追到狗，所以无论任何时候人都要面对着狗(狗的位置时时在移动，故人走的方向也时时在变。狗为了不被人追上，在任何时候狗都设法与人保持 r 的距离，这样穷追下去，狗向东跑，所以狗是在一条直

线上跑，人跑的路线叫定切曲线)，形如$\begin{cases} x = r\ln\tan\dfrac{\alpha}{2} + r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$(图 13.6(a))，绕着 x 轴(即狗跑的直线)旋转一周，便得到形状有点像大喇叭的曲面(叫做伪球面)，伪球面的特点是在每点的高斯曲率都等于 $-\dfrac{1}{r^2}$(图 13.6(b))。

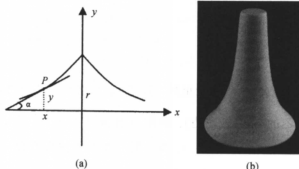


图 13.6 追狗曲线和伪球面

(三) 极妙定理与非欧几何

高斯曾证明了由曲面的第一基本形式就确定了曲面的总曲率(高斯曲率)，这一著名的发现被称为“极妙定理”。他所建立的曲面内在几何学有着极重要和极深远的影响，现在知道

$$\begin{cases} x = r\ln\tan\dfrac{\alpha}{2} + r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases} \quad (图 13.6)$$



黎曼

绕着 x 轴(即狗跑的直线)旋转一周，便得到形状有点像大喇叭的曲面(如光滑曲面)都有相应的内在几何学，因此有无数种几何学，平面几何只不过是平面上的内在几何学。高斯还证明了对常高斯曲率曲面上面积为 A 的测地三角形，内角和公式为

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi + KA,$$

其中$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 为该测地三角形的三内角，K 为曲面 S 的高斯曲率。显然，当 $K>0$ 时，测地三角形内角之和大于 π，例如，球面几何(也称黎曼几何)上的三角形内角和就大于 π。当 $K<0$ 时，测地三角形内角之和小于 π，例如，伪球面上的几何(也称为罗巴切夫斯基几何)中的三角形内角和就小 π。当 $K=0$ 时，三角形内角和等于 π。

参考文献

陈省身,陈维桓.1983.微分几何讲义.北京:北京大学出版社
卡尔莫.1988.曲线和曲面的微分几何学.田畴等译.上海:上海科学技术出版社
梅向明,黄敬之.1988.微分几何.北京:高等教育出版社
苏步青.1979.微分几何五讲.上海:上海科学技术出版社
吴大任.1981.微分几何讲义.北京:人民教育出版社

14 年轻的分形几何学

我们大多数人学过的几何学，源于古埃及的土地测量术，后来在古希腊发展成熟，经过欧几里得的整理，形成完整的体系，流传下来，到现在已经约有2500多年的历史了，欧氏几何的基本工具是圆规和直尺，所描述的对象都是直线和平面、圆与球、三角形与圆锥等规整的图形。在欧氏几何的基础上，人类逐渐建立起当今的数学大厦，而数学又成为科技的奠基石。

但是，自然界在实际上并不受传统几何的约束。你看，云彩、树皮、山岭地表、河流水系、人的血脉、闪电、冲积扇、泥裂、冻豆腐、水系、晶簇、蜂窝石、小麦须根系、树冠、支气管、星系、材料断口、小肠绒毛、大脑皮层等都显示出不规则的特征，欧氏几何对它们无能为力，只好将其搁置一边。这些不规则的东西，怎样用数学去表现出来呢？这成了人们努力去解开的一个谜。

想想它们的形状、结构！每样东西都挨不上。但用全新的视角去考察它们都是分形(fractal)，它们的确是一回事，都可统一用分形理论描述。



曼德勃罗

分形是近20多年来科学前沿领域提出的一个非常重要的概念，具有极强的概括力和解释力。分形理论是一种非常深刻、有价值、让人着迷的理论。

分形理论诞生于20世纪70年代中期，创始人是美国IBM的研究人员曼德勃罗(B.B.Mandelbrot，1924～)，他在1982年出版的《大自然的分形几何学》(The Fractal Geometry of Nature)是这一学科经典之作。

英国有一位叫路易斯·里查逊的科学家，为了研究曲曲折折的海岸线，他查阅了西班牙、葡萄牙、比利时、荷兰的百科全书，惊异地发现他们各自测量的国境河岸线长度的记录竟相差20%，真是见鬼了。于是，他向世界提出了海岸线的问题。

“英国的海岸线有多长?”这是《科学》杂志1967年一篇划时代论文的题目。作者曼德勃罗作出了自己的分析，他说：“事实上任何海岸线在某种意义上是无穷地长，从另一种意义说，答案取决于你所用的尺的长度。如果用1公里的尺子沿海岸测量，小于1公里的那些弯弯曲曲就会被忽略掉。若用1米的尺子，会得出较长的海岸线，因为它会捕捉到一些曲折的细部。反之，若用一种在卫星上观察的方法，一定会得出较短的岸线长度。再反过来，从蜗牛爬过每一个石子来看，这岸线必然长得吓人。”

“或许有很多人会以为不断增加的海岸线长度最后会收敛于一个特定的最后数值，即海岸线的真正长度。可是，假如海岸线是一种欧几里得图形，例如圆、直线，那是可以的。由小线段不断地取更小的段可以真正地收敛于圆周或线段的长度。实际上，随着测量尺度的变小，测出的岸线长度无限增大。小湾内有小湾，小半岛之外有小小半岛，直到原子的尺寸方才达到终点，而那里的尺度是无限地复杂。”

其实又何止海岸线呢？天上的云是球形的吗？富士山是圆锥形的吗？……曼德勃罗认为这种“不规则”的曲线与曲面才真正地反映了自然界的本质。

一、“数学怪物”和自相似性

如果你现在还是不能理解，让我们来看一种简单的模型：科和曲线(图 14.1)。



图 14.1

一正三角形，每一边是 1，现在在每边正中间的 1/3 处再凸出造一个正三角形，小三角形在三边上出现使原三角形变成六角形；再在六边形的 12 条边上重复进行中间 1/3 处凸出造一正三角形的过程，得到了 $4\times12=48$ 边形；每边的正中间还可以再在 1/3 处外凸一个小正三角形，如此至于无穷。其外缘的构造越来越精细。它好像是一片理想的雪花。它是 1904 年瑞典数学家格·冯·科和所描述的，所以叫做“科和雪花”，指那些无穷短的短边所连成有边缘曲线。

科和曲线有一些有趣的特性。它是一条连续的闭合曲线，自身不相交。它的总面积是有限的，永远小于原正三角形的外接圆。但它的长度却是无穷地长，因为每次变换后长度是原来的 4/3，那么这个过程无限进行下去后，边缘的长度为 $3\times(4/3)\times(4/3)\times(4/3)\cdots=\infty$。这是一个似乎自相矛盾的结果，在有限的空间中有无穷长的线，怎么会是这样呢？



科和

其实，类似“科和雪花”这样的怪物还有不少，图 14.2 的图形叫做“孟格尔海绵”和“谢尔宾斯基垫片”。猜猜看，它们是怎么形成的？

这些怪物们有一个共同的特点，那就是局部与整体的相似，这就是曼氏的分

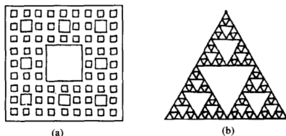


图 14.2

形几何中的一个极重要的概念：自相似性。即取分形图的任何一部分进行适当放大，便仍可得到与原来整个图形相似的图形。现代“混沌”理论的研究发现，“混沌”现象具有外表混乱而实际上无穷自相似的嵌套结构。这样，“分形”与“混沌”的研究便在“自相似性”这一点上汇合在了一起。

其实，自相似性很容易辨认，在人类文化的各个方面都会看到它的影子。比如《格列佛游记》中有四句诗，精彩地给出了一个“自相似”的例子：

啊！博物学家看到，一只跳蚤

有一只更小的跳蚤在它身上吸血

再又看到更小的跳蚤在小跳蚤身上吸血

如此直至无穷……

学过微积分的人都知道，函数的可微性(即可求导数)与连续性有内在联系。两者的关系是可微的函数必定连续，但连续的函数未必可微。一个简单的例子就是函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处连续，但不可微。这个函数只有这么一个特别的点，除此以外其他点都可微。有的函数在有限个点处是不可微的，也有更特别的函数，它们几乎处处不可微。

1860 年，瑞士一个名气不算大的数学家塞莱里埃(C.Cellerer, 1818～1889)在课堂上向皮克太特(R.Pictet)等学生讲解：“连续函数必定可微”的流行观念是错误的，并给出了一个类似魏尔斯特拉斯(K.T.W.Weierstrass, 1815～1897)函数的反例。黎曼(G.F.B.Riemann, 1826～1866)的学生曼海姆(J.H.Manheim)等人回忆说，大约在 1861 年，黎曼在讲座中提到了类似的例子，但未发表。

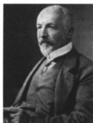
不过，1970 年有人证明，塞莱里埃函数和黎曼函数不同于魏尔斯特拉斯函数，它们不是处处不可微的，在某些点上它们是有导数的。

1872 年 7 月 18 日，魏尔斯特拉斯向柏林科学院报告了分析学中的一个反例，一个处处连续、但处处不可微的三角函数级数，即著名的魏尔斯特拉斯函数。不过此函数直到 1875 年才由杜布瓦-雷蒙(E.du Bois-Reymond)正式发表出来。

据考察，在魏尔斯特拉斯之前，已有不少数学家知道存在所谓的“魏尔斯特

拉斯函数”，但都耻于发表它！因为它破坏了分析学的完美性。大约在1834年波尔查诺(B.Bolzano, 1781～1848)构造过类似的函数，但他可能并不知道它有那样“可怕的”性质。

1883年，康托尔(G.F.P.Cantor, 1845～1918)构造了三分集，也叫康托尔非连续统(Cantor discontinuum)。它与实直线是相对立的，当时人们觉得它几乎是病态的。如今它已成为分形几何学的最典型、最简单的模型。


康托尔

1890年，皮亚诺(G.Peano, 1858～1932)提出充满空间的曲线——皮亚诺曲线。

1891年，希尔伯特(D.Hilbert, 1862～1943)在《数学年刊》(Mathematische Annalin)上发表短文，提出了能充满平面区域的著名的希尔伯特曲线。

1904年，瑞典数学家科和(H.von Koch, 1870～1924)构造出科和雪花曲线。

1915～1916年，波兰数学家谢尔宾斯基(W.Sierpinski, 1882～1969)构造了谢氏曲线、海绵、墓垛。谢氏地毯是平面万有曲线(plane universal curve)，谢氏海绵是空间万有曲线。奥地利数学家孟格尔(K.Menger)证明，任何曲线都可嵌入谢尔宾斯基地毯中。


豪斯多夫

1919年，豪斯多夫(F.Hausdorff, 1868～1942)给出维数的新定义，为维数的非整化提供了理论基础。

1918～1920年左右，法国数学家朱丽娅(G.Julia, 1893～1978)、法图(P.J.L.Fatou, 1878～1929)研究复迭代。朱丽娅于1918年(当时他25岁)在《纯粹数学与应用数学杂志》上发表了长达199页的杰作，一举成名。

1924年11月20日曼德勃罗生于波兰。

二、何为分形

分形指具有多重自相似的对象，它可以是自然存在的，也可以是人造的。花椰菜、树木、山川、云朵、脑电图、材料断口等都是典型的分形。根据英国儿歌改编的一首小诗可以说明分形之普遍性：

一个分形的人，

穿过分形的森林，

走过分形的一英里，

分形地捡到了一枚分形的六便士。

买了一只分形的猫，

抓了一只分形的老鼠。

分形的人，

分形的猫，

分形的老鼠，

都挤在分形的小屋里。

分形人分形的大脑皮层里，

构思着分形猫分形地吞下分形老鼠，

分形老鼠被分形猫分形的小肠壁分形地吸收着……

如果您从未听说过"分形"，一时又很难搞清楚分形是什么，有一个简单迅捷的办法：去市场买一个新鲜的菜花(花椰菜)，掰下一枝，切开，仔细观察，思考其组织结构。这就是分形！分形概念虽然极有价值，但它并不神秘，人人都能明白它的基本含义。

分形理论是一门交叉性的横断学科，从振动力学到流体力学、天文学和计算机图形学，从分子生物学到生理学、生物形态学，从材料科学到地球科学、地理科学，从经济学到语言学、社会学等等，无不闪现着分形的身影。分形理论已经对方法论和自然观产生强烈影响，从分形的观点看世界，我们发现，这个世界是以分形的方式存在和演化着的世界。

引用分形这一学科当之无愧的领袖人物曼德勃罗的话，也许可以使您很快进入状态：



曼德勃罗

"为什么几何学常常被说成是'冷酷无情'和'枯燥乏味'的？原因之一在于它无力描写云彩 、山岭、海岸线或树木的形状。云彩不是球体，山岭不是锥体，海岸线不是圆周，树皮并不光滑，闪电更不是沿着直线传播的。

更为一般地，要指出，自然界的许多图样是如此的不规则和支离破碎，以致与欧几里得(几何)相比，自然界不只具有较高程度的复杂性，而且拥有完全不同层次上的复杂度。自然界图样的长度，在不同标度下的数目，在所有实际情况下都是无限的。

这些图样的存在，激励着我们去探索那些被欧几里得搁置在一边，被认为是'无形状可言的'形状，去研究'无定形'的形态学。然而数学家蔑视这种挑战，他

们想出种种与我们看得见或感觉到的任何东西都无关的理论，却回避从大自然提出的问题。

作为对这个挑战的回答，我构思和发展了大自然的一种新的几何学，并在许多不同领域中找到了用途。它描述了我们周围的许多不规则和支离破碎的形状，并通过鉴别出一族我称为分形的形状，创立了相当成熟的理论。”

三、分形几何

1975年的一天，曼德勃罗翻看儿子的拉丁语课本，突然受到启发，决定根据“fractus”创造一个新词，于是有了“fractal”这个英文词。后来法文词、德文词也都这样写；名词和形容词也都一样。同年他用法文出版了专著《分形对象：形、机遇与维数》(Les objets fractals: forme, hasard et dimension)，1977年出版了此书的英译本《分形：形、机遇与维数》。1982年又出版了此书的增补本，改名为《大自然的分形几何学》。“分形”(Fractal)这个新名词，来源于拉丁文“fractus”，其意包含fractured(断裂)和fractional(碎片的、分数的)双重含义。20世纪70年代末“fractal”传到中国，一时难以定译。一日，中国科学院物理所李荫远(1919～)院士说，“fractal”应当译成“分形”，郝柏林(1934～)、张恭庆(1936～)、赵凯华(1930～)、朱照宣等科学家表示赞同，于是在中国内地“fractal”逐渐定译为“分形”，如今台湾还译“碎形”，显然不如“分形”好。

另外，曼德勃罗还发明了“分数维”的概念，来定量地度量事物的不规则性和碎裂程度，即在不同的比例尺下事物的自相似性。

我们不妨简单地解释一下维数，一般来讲，点是0维，直线是1维，平面是2维，立体是3维。这是一般的几何图形的概念，它由“坐标”概念所表述：物体或几何图形的维数就是描述其任意一点位置所需要的独立坐标数。在数学上，一个独立坐标对应着一个独立变量，因此，独立变量的数目又被视为维数。然而，以前所有关于“维数”的概念基本上都是“整数维”。其实，“分数维”也可从整数维推演出来。简单讲，若有 $b=a^D$，设 a 为一线段：

当 $D=1$ 时，b 就是与 a 等长的线段；

当 $D=2$ 时，b 就是以 a 为边的正方体；

当 $D=3$ 时，b 就是以 a 为边的立方体。

由此，$D=\lg b/\lg a$，它具有维数的意义。这样定义的维数既可能是整数，又可能是分数。如此便产生了分数维。

目前有研究算出了许多自然分形和人工分形的分数维数。如：

康托尔三分集的维数　$\lg 2/\lg 3 \approx 0.6309$

科和雪花曲线的维数　$\lg 4/\lg 3 \approx 1.2619$

海岸线的维数　$1<D<1.3$

山地表面维数　$2.1<D<2.9$

河流水系维数　$1.1<D<1.85$

云的维数　$D=1.35$

金属断裂的维数　$D=1.27\pm0.02$

人肺的维数　$D\approx2.17$

血管直径分布维数　$D\approx2.3$

人脑表面维数　$2.73<D<2.79$

人的脑电图维数　$1.9<D<2.4$

新生的婴儿总是丑陋的，一门新科学的诞生也必定要经历从古怪的设想到严格的论证的过渡及实践中的摸索。开始，因为它与传统背道而驰，人们对曼氏的分形几何不屑一顾，只有少数人接受了他的思想。

美国哥伦比亚大学教授克利斯朵夫·肖尔茨，是一位最早在他的地震研究中运用分形工具的科学家，它发现分形几何学为描述地球表面的崎岖不平提供了强有力的工具。而金属学家同样发现用分形几何来描述钢铁表面也极为合适。金属表面的分维数为金属的强度提供有用的信息，而地球表面的分维数也有十分重要的作用，表现出此地区地壳的性质。

科学家关于事物会提出许多问题，最基本的莫过于：它有多大？持续多久？现代科学家们提出，大小与持续时间的长短，完全是一些依赖于尺度的性质。每种动物，都有特定的尺度相联系。如果人体加大两倍，而一切比例保持不变，体重就可能压垮骨骼。可见，尺度是非常重要的。在这一点上，地震与动物的情形是不同的。一次大地震与一次小地震的构造尺度相似。云也是这样，卫星照片表明，从几百里外所摄的云的分形维数是不变的。

由主动脉到动脉到毛细血管，形成了另一种分形结构。它们分枝再分枝，由于生理上需要，血管必须进行维数的变化，正像是“科和雪花”可以把无限长的曲线挤入一个小的面积中，循环系统必须把巨大的面积挤入有限的体积。分形结构所设计的工作是如此有效，血管和血液只占了极少的空间，还不超过人体的5%。

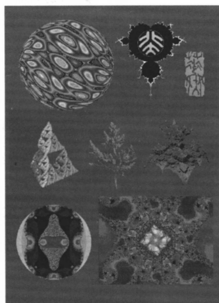
如果抛弃欧氏几何的观点而改换分形几何的新思想，一些自然界的形象将变得非常简单。动物的DNA中可能有编码形式的反复分枝结构。美国陆军与杜邦分公司曾经试图合成人造羽绒，研究表明天然羽绒之所以储存大量的空气。其实正是羽绒的蛋白质角蛋白有分形的节点和分枝。或许分形尺度在生态形成的过程中不仅是常见的现象，而且是普遍的根本规律。分形花样如何在RNA、DNA上编码是当代生物科学中一大问题。

在应用科学家中，分形几何最热情的支持者是研究油、岩、金属的科学家，还有产业公司的研究开发部。80年代中期，美国埃克森大型科技中心用大量的人

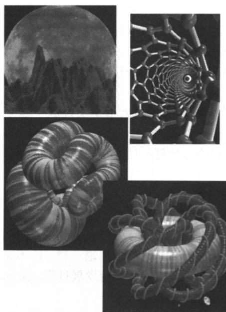
力物力研究分形问题；在IBM公司，分形概念被当作高分子的组织原理来看待；在研究核反应堆的安全问题中，分形也极为重要；在好莱坞，有人独出心裁地应用分形图案在电影中创造大自然的奇景，创造太空梦幻等种种特效镜头；利用计算机绘制的分形图画色彩斑斓，极具美感，分形现已成为一种新型艺术，它不时地出现在各种杂志和书籍的封面上。

分形在科技和生活中得到应用的大量事实说服了越来越多的数学家、化学家、地震学家、金属学家和生理学家，他们又去说服别人肯定分形几何学的价值。可以预见，这种新的几何学定会打破过去某些传统的束缚，为人类观察自然提供新的工具。

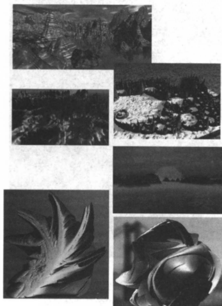
分形理论有很强的解释能力，能说明大自然的许多形态发生和自组织过程，分形自相似原理和分形迭代生成原理对于人们更好地认识世界起到了推动作用。分形图形生成技术也对传统艺术造成了不小的冲击。但不能把一种科学理论任意夸大、玄学化。分形理论与所有其他科学理论一样，绝不是万能的。分形理论已走过轰轰烈烈的革命式发展时期，进入平稳发展过程。注意到其限度，不断创新，由分形引出的新科学才有生命力。



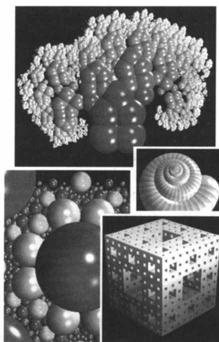
左上角图采用动力学方法生成然后作黎曼球投影。
右上角图是旋转90°的曼德勃罗集。
下面两图均采用复迭代方法生成



左上图《日出》，其余各图为数学抽象实体，均由斯普罗特制作



用分形方法生成的自然景观，下面两图是用实迭代方法生成的抽象实体，
作者为斯普罗特和皮克欧沃等



右下图为谢氏海绵，斯普罗特制作

参 考 文 献

梁宗巨．1995．一万个世界之谜——数学分册．武汉：湖北少年儿童出版社
刘华杰．1998．分形艺术．长沙：湖南科学技术出版社
齐民友．2000．世纪之交话数学．武汉：湖北教育出版社
文志英，井竹君．1995．分形几何和分维数简介．数学的实践与认识．(4)：20～34

15　数学机械化和例证法

数学机械化是首届中国国家最高科技奖得主吴文俊得奖的主要因素之一，那么究竟什么是数学机械化？



吴文俊

十六、十七世纪以来，人类历史上经历了一场史无前例的技术革命，出现了各种类型的机器，取代各种形式的体力劳动，使人类进入一个新时代。几百年后的今天，电子计算机已开始有条件地代替一部分特定的体力劳动，因而人类已面临另一场更宏伟的技术革命，处在又一个新时代的前夕。数学是一种典型的脑力劳动，它在这场新的技术革命中，无疑将扮演一个重要的角色。

所谓机械化，就是刻板化和规格化。机械化的动作，由于简单刻板，因而可以让机器来实现，又由于往往需要反复千百万次，超出了人力的可能，因而又不能不让机器来实现。因而，机械化为机器化，进而为自动化铺平了道路，是必不可少的前奏。

实际上，在中小学课程里，人们已经进行了不少机械化的训练。比如，加减乘除四则运算就完全是机械化的，正因为如此才可能在17世纪出现加法机器，继而又出现乘法机器。数学机械化使大量繁复的工作交给计算机去做，人脑将仍然从事富有创造性的活动。

中国科学院院士吴文俊自20世纪70年代末起，受中国古代数学算法化思想和计算机技术的启发，开始进行几何定理机器证明研究，从而开拓出一条数学机械化的道路。数十年间，不仅建立了“吴中心”，而且形成了“吴学派”，建立了有中国特色的数学机械化理论，在这一领域处于世界领先地位。

吴文俊说：“数学机械化的研究目前仅仅处于起步阶段，主要局限于代数几何、微分几何等领域，如何扩大数学机械化的范围，将是今后需要长期探索的问题。”

数学机械化和例证法都是近年来的新鲜事，著名数学家吴文俊因数学机械化的独创性，获2000年首届中国科技最高奖。那么什么是数学机械化呢？例证法又是怎么一回事？我国数学机械化目前的现状如何？

一、数学机械化

数学机械化（mathematical mechanization）指数学操作的机械化分解，使之成为简单的、单调的、刻板的、重复的动作组合，这样就可以用计算机处理、解决大量的数学问题。


塔斯基


哥德尔

中国古代数学基本上是一种机械化的数学。秦汉时期的《九章算术》，其中对四则运算、开方的机械化算法过程有详细说明，对于线性方程组的解法在魏晋时期的刘徽所写的《九章算术注》中就已说明了几种机械化的消去法及其详细的机械算法过程。到宋代更发展到了高次代数方程求数值解的机械化算法。求解同余式的问题，秦九韶在其《数书九章》中曾给出了“大衍求一术”的算法，其机械化程度非常之高。数学的机械化主要是几何学机械化，而几何学机械化方法起源于12世纪和13世纪中国宋元时期初次出现的几何学代数化，即将几何学问题化为多项式问题以及相伴而生的多项式组消去法。

17世纪德国莱布尼茨（G. W. Leibniz）曾有过“推理机器”的机械化证明的设想。只是直到19世纪末德国希尔伯特（D. Hilbert）以及后来建立的数理逻辑，才使这一问题具有明确的数学形式。几十年来数学家们为解决这一问题付出了巨大劳动，但是他们所得到的结果基本上是反面的，即所谓不可判定性。例如有哥德尔（K. Gödel）定理：初等整数数论的定理证明不可能机械化。随着电子计算机的问世，使证明机械化这一设想有了现实的意义。1950年波兰塔斯基（A. Tarski）证明了一个值得称道的正面结果——塔斯基定理：初等几何（以及初等代数）的定理证明可以机械化。塔斯基等人还因此提出制造判定机器（也就是证明机）的设想。然而他们的方法与设想基于施图姆（C. F. Sturm）定理的某种推广，而且这些方法极繁复，实际上计算机难以实现。

1956年以来，美国科学家开始尝试用电子计算机证明一些数学定理，1959年美国王浩设计了相应的程序，用计算机证明了罗素（B. A. W. Russell）、怀德海（H. Whitehead）的巨著《数学原理》中的几百条定理，仅用9分钟。1976年，美国阿佩尔（K.Appel）和哈肯（W.Haken）在高速电子计算机上用1200小时的计算时间证明了“四色定理”，使100多年来未能解决的这个难题得到了肯定的回答。

另一个被忽视的正面结果，是由希尔伯特在1899年提出的“希尔伯特机械

化定理”：初等几何中只涉及关联与平行关系的定理证明可以机械化。显然这是塔斯基定理的一个特例，但值得注意的是，希尔伯特的机械化证明方法是切实可行的。

吴文俊在中国古代数学机械化思想的启发下，独立研究并于1977年获得了下面的结论：

定理1 初等几何中只牵涉到关联、平行与合同关系的定理证明可以机械化。


吴文俊

这与希尔伯特不谋而合。同时吴文俊还对所需计算量做出了理论上的估计，得到：

定理2 初等几何中只牵涉关联、平行与合同关系且“不可约”的定理证明，其计算量满足不等关系：计算复杂度≤定理复杂度·几何复杂度。

1978年，吴文俊又将初等几何的结果推广至初等微分几何，得到：

定理3 在初等微分几何中，凡可用微分多项式等式关系表达的定理的证明可以机械化。

只是这里定理证明的机械化方法依赖于里奇（G. Ricci-Curbastro）关于微分方程与微分代数的理论与方法，比用初等几何的情形要复杂得多。

吴文俊提出的新的机器证明方法被称为“吴方法”，它是基于Ritt原理和零点分解定理的。吴文俊、周咸青、王浩、胡森和王东明等人，使用吴方法在微机上迅速地解决了下述各问题：

(1) 初等几何定理的机器证明与机器发明。如1989年周咸青基于吴方法用自己编制的程序，在计算机上证明了512条定理；所用的机器时间一般每条定理才几秒钟，其中还有许多新定理。这种方法还普遍适用于各种初等几何，其中包括非欧几何、圆几何等。

(2) 微分几何定理的机器证明与机器发明。

(3) 未知关系的机械推导。

(4) 高次代数方程组求解问题。

(5) 因子分解问题（特别是对多变量多项式的因子分解）。

举世瞩目的吴方法可以分成下面3个主要步骤证明几何命题：

第1步，把几何命题化为纯代数问题。

第2步，将几何命题假设部分的代数关系式进行整理，然后依确定步骤验证命题终结部分的代数关系式是否可以从假设部分已整理成序的代数关系式中推

出。它包括：①整序。即是把假设部分化成一种规范形式——吴升列。②伪除法求余。最后得到的多项式 R_0，如果 R_0 是零多项式，就表明在非退化条件下，所要检验的命题成立。这由吴方法中二条定理所保证。而如果不是零多项式，吴方法证明：

(1) 若相应的升列是“不可约”的，则 $R_0 \neq 0$ 便表明命题不成立。

(2) 对“可约”的升列，则总可以通过因式分解，分解为几个“不可约”的升列，从而把问题完全解决了。

第 3 步，依据第 2 步中所确定的步骤编程序，并在计算机上实施，以得出命题是否成立的最后结论。

吴方法的出现，开辟了数学机械化的一个新纪元，用它不但证明牛顿定律可以用计算机程序从开普勒定律推导出来，而且也在机器人学、自动控制、计算机视觉、化学平衡、几何模型等领域有着广泛的应用。吴方法大有方兴未艾之势，这一领域中有许多有意义的课题尚待解决。如①几何不等式的证明机械化。②非退化条件的处理方式，尚有争论。③可约系统的更有效算法。④如何把研究范围从多项式推广到初等函数。⑤怎样设计并行程序，用作处理更繁难的问题。

在吴文俊数学机械化理论与方法的影响下，1986 年以来中国洪加威等人又提出了通过数值实例的检验来证明几何定理的思想与方法，这一方法在机器证明领域是一很有前景的研究热点。

现在由吴文俊担任学术指导，国内有二三十个单位的六七十名科学家在从事数学机械化研究。高小山博士说，数学机械化方法的应用领域极其广阔，它可以为数学和其他领域的研究提供工具，为计算推理提供一种强有力的工具。在数学研究中的应用，可以把数学家从繁重的脑力劳动中解放出来，从而推动学科发展。这是数学机械化方法将来发展的主要方面之一，现在已经起步了。另外一个方面，数学机械化方法将会被应用于交叉研究，如力学、理论物理、机械机构学、计算机技术、图像压缩、信息保密、新一代数控机床、计算机图形学、计算机辅助设计、机器人等许多领域。

二、例 证 法

两千多年来，已形成了这样的传统看法：

要肯定一个数学命题成立，只有给出演绎的证明，举几个例子是不够的。

老师让学生们在纸上画一些三角形，再用量角器量一量这些三角形的各个角，分别把同一个三角形的三个角的度数加起来。于是，同学们发现：三角形的内角和总是 180°，这是人们认识事物规律的一种方法——归纳推理的方法，从大量事例中寻找一般规律。

但是，老师反过来又提出了这样的问题：

三角形有无穷多种不同的样子，你们才测量了几个，几十个，怎么就知道所有的三角形内角和都是180°呢？就是测量一千个，一万个，也不能断定所有的三角形都有同样的内角和呀！再说，测量总是有误差的；你怎么知道三个角的度数之和不是179.9999，也不是180.00001，而是不多不少180°呢？

于是，大家心服口服，开始认识到演绎推理的重要性，知道了要肯定一条几何命题是定理，必须给出证明，而举几个例子，是算不得证明的。

但是，近几年来，我国的一些数学工作者提出了与这种传统看法大相径庭的见解。他们的研究结果表明：要肯定或否定一条初等几何命题（包括欧氏几何，以及各种非欧几何的命题），只要检验若干个数值实例就可以了。至于要检验多少个例子才够，则可以根据命题的“复杂”程度具体估算出来。检验时要计算，计算有误差怎么办？研究表明，只要误差不超过某个界限就行。这界限，也可以根据命题的“复杂”程度来确定。

用举例的方法证明定理，叫例证法。例证法不仅是理论上的探讨，而且确实能用来在计算机上或通过手算证明相当难的几何定理。人们还用它发现了有趣的新定理。

但是，这种违反传统的方法可靠吗？它的根据是什么？

要理解它的粗略道理，并不需要十分高深的数学知识。高中代数知识就差不多了，不过，要掌握每一个细节，却要下点工夫。

代数恒等式例证法

几年之前，当吴文俊（1977），洪加威（1986）提出用举例的方法足以证明几何定理时，国内外不少人曾大为惊奇，其书中证明过程较长，一般读者看起来颇为吃力，更觉得例证法有点神秘，高深莫测。

其实，它的基本思想很平凡。从中学代数里，不难找出例证法的最简单的例子。

要证明恒等式

$$(x+1)(x-1)=x^2-1 \tag{15.1}$$

通常是把左端展开，合并同类项，比较两端同类项系数，便知分晓。

其实，也可以用数值检验。取 $x=0$，两端都是 -1；取 $x=1$，两端都是0；取 $x=2$，两端都是3。这便证明了式（15.1）是恒等式。

为什么呢？可用反证法证明我们的判断。

若式（15.1）不是恒等式，它便是不高于二次的一元代数方程，这种方程至

多有两个根。现在已有 $x=0$，1，2 三个根了，就表明它不是一次或二次方程。这个矛盾证明了式（15.1）是恒等式。

一般说来，n 次代数方程不可能有 $n+1$ 个根。如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是不超过 n 次的多项式，而且有 x 的 $n+1$ 个不同的值 a_0，a_1，…，a_n，使 $f(a_k)=g(a_k)$ $(k=0, 1, \cdots, n)$，则等式 $f(x)=g(x)$ 是恒等式。

这就是说，要问一个单变元的代数等式是不是恒等式，只要用有限个变元的值代入检验，也就是举有限个例子，即可作出判断。例子要多少？这要看代数式的次数，如果次数不超过 n，则 $n+1$ 个例子便够了。

多变元的代数恒等式能不能用举例的方法来检验呢？回答是肯定的，因为我们有下面的定理 1。

比如，要检验等式

$$(x+y)(x-y)-x^2+y^2=0$$

是不是恒等式，首先看出它关于变元 x，y 的次数都不超过 2，故要在 $(2+1)\times(2+1)=3\times3$ 的格阵上检验。让 x 在 $\{0, 1, 2\}$ 中取值，y 也在 $\{0, 1, 2\}$ 中取值，得到格阵中的 9 组值

(0，0)，(0，1)，(0，2)，(1，0)，(1，1)，

(1，2)，(2，0)，(2，1)，(1，2)

分别代入检验即可。

例证法（proof by exemplification）通过数值实例的检验证明几何定理的思想与方法；即用举例的方法证明数学定理。它不仅是理论上的探讨，而且确实能用在计算机上或通过手算证明相当难的几何定理，人们还用它发现了一些新定理。

例证法是在吴文俊数学机械化理论与方法的影响之下，由中国数学家在 80 年代首先提出的。1986 年，洪加威在加拿大多伦多举行的第 27 届国际电脑科学基础会议上，作了题为《能用举例的方法证明几何定理吗?》的学术报告，最早得出用举例的方法足以证明几何定理（即单点例证法）。1989 年张景中和杨路正式提出了另一种更有实用价值的例证法，即数值并行法（也称多点例证法）。其实这两种方法的基本思想，大体上都是在 1984 年产生的。这以后侯晓荣于 1990 年在天津计算数学会议上又报告了另一种例证法。但是最实用的是数值并行法。这 3 种例证法都是分别基于以下 3 个定理。

定理 1　设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 是 x_1，x_2，…，x_m 的多项式，它关于 x_k 的次数不大于 n_k，对应于 $k=1, 2, \cdots, m$，取数组 $a_{k,l}$ $(l=0, 1, \cdots, n_k)$ 使得 $l_1\neq l_2$ 时，有 $a_{k,l_1}\neq a_{k,l_2}$，如果对任一组 $\{l_1, \cdots, l_m, 0\leqslant l_k<n_k\}$，都有 $f(a_{1,l_1}, \cdots, a_{m,l_m})=0$。则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 是恒为零的多项式。

定理 2　设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的多项式，它关于 x_k 的次数不大于 n_k，$1 \leqslant k \leqslant m$，又设它的标准展式中非零系数的绝对值不大于 L，不小于 $S>0$，如果变元的一组值 $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_m$ 满足

$$\begin{cases} |\hat{x}_1| = p_1 \geqslant \dfrac{L}{S} + 1 \\ |\hat{x}_k| = p_k \geqslant p_{k-1}^{n_{k-1}+1} + 1 \qquad (k = 3, \cdots, m) \end{cases} \tag{15.2}$$

则有 $|f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_m)| \geqslant S > 0$。

定理 3　设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的整系数多项式，它关于 x_k 的次数不超过 n_k，又设 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 是 m 个互不相同的素数，则当取 $\hat{x}_k = \sqrt[n_k+1]{p_k}$ 时，只要 f 不恒为零，总有 $f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_m) \neq 0$。

着眼于多项式根的个数所得到的定理 1，提供了可以证明的几何定理例证法即数值并行法；着眼于多项式根的界限的定理 2，就提供了单点例证法；而着眼于多项式根的性质的定理 3，则提供了侯晓荣例证法。

数值并行法可以证明代数恒等式，也可以证明能化成代数恒等式的几何命题。对于代数恒等式的证明，首先要估计 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 关于各个变元 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的次数的上界。其次是确定用哪些数值代入检验，这时已估计好了 x_k 的次数不超过 n_k，那就让 x_k 这个变元取 n_k+1 个不同值。n_k+1 个不同的值 $a_{k,0}$；$a_{k,1}$，$\cdots$，a_{k,n_k} 组成有限集 A_k，$k=1, 2, \cdots, m$。从 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 中各取一个，便凑出一组 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 的值；一共可凑出 $(n_1+1)(n_2+1)\cdots(n_k+1)$ 个数组来。这样的数组集称为格阵。最后将这每组值都代入 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 加以检验。若每组值都使 $f=0$，便证明 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 恒等于零。

对于几何定理的证明步骤和思路如下：

第 1 步，利用取坐标或三角函数，把问题表成代数形式：在一组代数等式条件下，问另一代数等式是否成立。

第 2 步，设想利用假设条件消去结论等式中的约束变元，使结论转化为只含自由变元的代数方程，估计此代数方程关于各变元的次数以确定格阵规模（并不真的写出这个方程）。

第 3 步，根据格阵规模取自由变元的若干组数组，检验命题对于这些具体数值是否成立。如果都成立，则表明第 2 步中的代数方程为恒等式，从而命题为真。第 2 步中的消去约束变元得到一个只含自由变元的代数方程，是总能办到的，这可由吴-瑞特（Ritt）整序原理保证。

单点例证法的思想，是对于一个数学命题，可以通过给出一个数值例子，使该命题成立的充要条件是该命题对该特例成立。在计算检验这个具体例子的时候，需要进行加、减、乘、除、开方等等计算，一定会有误差。如果最后的等式判断语句中，等号两边之差非常接近零，那么我们可根据一些裂缝定理，说明如果一个数学等式判断语句两边的差小到一定程度之后，就说明绝对等于零。在证明代数恒等式时，对于一元代数恒等式的证明则需要举一个足够大的数值例子；而对于一个多元代数恒等式的证明，这个数值例子要涉及很大的变元数值。

如按定理 2，有 $|\hat{x}_m| > \left(\frac{L}{S}\right)^{(n_1+1)(n_2+1)\cdots(n_k+1)}$，这表明运算涉及的有效数字之长正比于 $\ln|\hat{x}_m| > (n_1+1)\cdots(n_m+1)\ L_m\frac{L}{S}$。而作一次乘法，运算工作量正比于有效数字长度的平方，即 $(\ln|\hat{x}_m|)^2$。显然当变元数目稍多时，将涉及很大的数值计算，这在计算机上难以实现。但它所引出的观念的确是美妙而吸引人的，也引起了国际数学界同仁的很大兴趣。

很有研究前景的数值并行法用于机器证明，还有许多变化与发展：

(1) 单点例证法与数值并行法可以结合使用，对某些变元用单点法，另一些变元用数值并行法。

(2) 数值并行法与吴-瑞特除法可以结合使用，先消去一些变元，再对剩下的约束变元用并行法。这样可对不同的问题寻找组合优化的证法。

(3) 既然吴-瑞特除法可以把“条件等式”问题化为“自由变元恒等式”问题，那么，任一种检验代数恒等式的数值方法都可以和吴-瑞特除法结合起来形成几何定理机械化证明的数值算法。这已超出了例证法的范围，但仍可以用数值并行法。

(4) 数值并行法还可以用来证明几何不等式这一机器证明中的难点，但这有待于进一步研究。

用机械化的方法解决千变万化的数学问题，一直是科学家们的梦想。新一代的计算机数学系统（如 Mathematica，MatLab 等）解决了大量的复杂的数学计算问题，在数学定理证明的机械化领域中，中国数学家的工作举世瞩目，尤其是几何定理的机器证明，20 世纪 80 年代，吴法的成功实现促进了这个领域在国际范围的蓬勃发展，多种机器证明的代数方法提出并得到成功实现。但是包括吴法在内的各种代数方法，在证明几何定理的过程中，都用到多元多项式的加减乘除。由于这些多项式常常是几十项、几百项甚至上千项的大多项式。显然打印出这样的证明过程，人很难看明白。即使看明白了计算过程，也未必懂其中的几何意义，心中仍不能确信其真理性。这产生了几何定理可读证明的自动生成问题，这种可读证明即指便于人们理解、掌握和检验的证明，在这方面我国学者张景中、

杨路、周咸青、高小山等人做了一系列开拓性的工作。

张景中院士曾这样自述关于发现几何定理可读证明自动生成的故事："1992年5月，我应周咸青博士邀请到美国维奇塔大学合作研究。这几个月的工作经历给我留下难忘的记忆。

到达美国的第一天的晚上，我们就研究计划进行了讨论。我提出了以面积法为工具，用计算机生成几何定理'短证明'的设想。我对面积方法的研究始于1974年在新疆一所中学任教之时，曾将部分心得整理出版。近20年的经验使我相信，面积方法是一种普遍有效的平面几何解题方法。


张景中

那时还没有形成'可读证明'的概念。我说的'短证明'，就是后来说的可读证明。

周说，即使对希尔伯特交点型命题类实现这个设想，也是很好的结果。但他又说，你的面积方法不是算法，没法用计算机做。

自1986年以来，我断断续续地在想如何把面积方法变成算法，用在机器证明上。那天晚上的讨论促使自己思维聚焦，对这个问题进行了最后的冲刺。

经过一个不眠之夜，第二天早晨，我对周说：'有算法了。'他说，你给我做两个例子我才信。一个是平行四边形对角线互相平分，另一个是巴卜士定理。

我用消点法在纸上机械地做了这两个题。

他说，我基本相信了。

然后他教我用LISP语言写程序，我们开始工作了。这一工作开辟了几何问题机器求解的另一条路线。

两星期后，周回中国开会探亲。6月底他返美时，没到学校就和我通电话。我说，新编的程序已经证明70多条定理了。

当年7月，高小山也来到美国维奇塔大学并参加了这项研究。我们三人的合作研究愉快而顺利，理论和算法得到了成功实现和进一步的发展与完善，这就是基于几何不变量的消点法。由于所用的主要几何不变量是面积，故常被称作面积法。用这种方法，能对大量的非平凡的几何命题由计算机生成简洁的有几何意义的证明，即所谓可读证明。"

这项工作被自动推理领域的国际同行誉为"计算机发展几何问题解题能力的道路上的里程碑"，"自动推理领域30年来最重要的工作"。在1996年美国芝加哥一次关于自动推理的学术会议上，主题报告中6次提到这项成果，并把它放在近年来自动推理领域5项最重要进展的首位。

有趣的是，消点法从原理到算法一点也不依赖古典几何之外的知识。这种似乎和现代计算机技术密切联系的工作，逻辑上完全可以在欧几里得时代出现。欧

几里得、笛卡儿、莱布尼茨、希尔伯特这些关心过几何推理的科学大师都有可能顺手发现消点方法。但它就像一颗埋在泥土中的珍珠，一直被忽视了 2000 多年。张景中说："我们是幸运的。"

这一突破使几何问题机械求解的研究进入了能够在实际中应用的新阶段。从 1992 年至 1995 年，张景中等人进一步推广了几何问题可读解答机械化的方法和适用范围。实现了立体几何问题求解的体积方法(Chou S.C. et al. 1995)，几何定理可读证明自动生成的向量法、复数法(Chou S.C. et al. 1993)和全角法(Chou S.C. et al. 1994)，建立了能自动生成传统风格解答的几何信息搜索系统(张景中等 1996)。这样，几何解题软件推向市场的条件已经成熟了。

计算机开始学会了像人那样解决几何问题。

前面提到，人们曾用计算机证明了数以百计的困难的几何定理。这些定理是从多种书刊上搜集来的，是数学家早已证明了的。那么，能不能用计算机发现新的几何定理呢？

起初，有些研究报告称，用计算机发现了新的几何定理。但不久就查出来，这些定理在文献中早有记载。欧氏几何历史太悠久了，文献浩如烟海，想找出一条漂亮的新定理，确实是困难的。

相比之下，非欧几何历史短得多，定理的证明也难得多。用计算机发现非欧几何的新定理，该是大有可为的吧！

1993 年，张景中、杨路、高小山、周咸青把消点法推广到了非欧几何，用计算机发现了几十条非欧几何的新定理，并且自动生成了它们的可读证明(Yang L. et al. 1998)。

1996 年后，李洪波博士、王东明博士发展了不变量方法，把消点法推广到了广义的向量空间，即 Clifford 代数(Li H. 1999, Wang D. 1997)。

1997 年，吉林大学的张树国教授和杨海圈博士又把消点法推广，对一批关于圆锥曲线的定理，用计算机自动生成了其可读证明(Zhang S.G. et al. 1998)。

几何问题，通常包括证明、计算、公式推导和作图。用消点法和几何信息搜索系统做证明题、计算题和公式推导是方便的。几何作图又如何呢？

事实上，作图、证明、计算和公式推导是相通的。对一个作图题，假定图已经作好了，再对图中的几何信息进行搜索推导，往往能发现作图的方法。这样，又开辟了几何作图机械化的一条道路(Chou S.C. et al. 1996)。

计算机自动生成几何问题可读解答的困难，被成功地突破了。几何作图机械化的研究，不但有传统的兴趣，更有广泛的应用。它目前在国际上是一个很活跃的研究领域。Chou S. C. (1996) 在消点法和 GISS 基础上，发展了一类几何作图问题的求解算法并实现为有效的程序。这个程序对一大类尺规可解的几何作图问题能自动地生成作图步骤和可读证明。

张景中院士说："这一方向的研究，可以说是方兴未艾，有大量的工作可做。"

在过去的 20 年，几何定理机器求解的各种方法都有长足的发展。如何把不同的方法综合起来，组织成有效的几何问题计算机自动求解或人机交互求解系统，将成为更有意义的研究方向。

这 20 年来的进展，使得几何定理机器求解的研究从基础研究领域扩展到了应用研究和开发研究的领域。

这里有间接的应用，也有直接的应用。

1. 间接的应用

在研究几何定理机器求解时，创造或发展了一些新的方法或代数工具，它们可用来解决其他领域的问题，这是间接的应用。如机构设计、曲面造型、计算机辅助设计、机器人控制、计算机视觉以及其他有关的数学问题。这方面虽已有许多工作，但都是本领域的研究人员自己的设想，与技术领域的用户需求有一定距离。如果要推进这类应用的研究，有必要做更具体的需求分析，并开发界面友好、易学易用的软件。

2. 直接的应用

把几何定理机器求解的程序发展为软件，或者嵌入计算机应用软件，这就是直接的应用。这类应用的实际需求，主要有两个方面：

一是为研究者、教师和数学爱好者提供智能性几何解题电子词典，对两千多年的初等几何作一个相对完美的总结。这一工作工程浩大，但如做得好，将是对科学文化事业的重要贡献。

二是应用几何定理机器求解研究的成果，可以研制出高智能的教育软件。这方面有形成软件产业的现实可能性。由中国科学院成都地奥公司投资，委托成都计算机应用研究所、广州师范学院计算机软件研究所，开发了中学数学教育智能软件《数学实验室》。这是我国第一批通过了教育部教材审定委员会审查的中学教学软件，受到教育家和老师们的欢迎。教育的应用对机器求解提出了更高要求：必须用学生能接受的方式给出解答；要有十分友好的界面；能在学生解题时提示和纠正错误等等。

社会的需求还会把机器求解的研究推向更广的领域，不仅研究几何问题的机器求解，而且要探讨一般理科问题的机器求解方法。

相信在未来 5～10 年中，我国在几何问题（以至理科问题）机器求解领域，不仅会出现一批高水平的基础研究成果，体现我国在这一领域的学术水平的优秀软件也将脱颖而出。

数学机械化与例证法的成果必将走进大众教育，这是一个多么诱人的前景。

参 考 文 献

邓光克.1988.科学通报.24:1851

洪加威.1986.中国科学(A辑),3:225～233

洪加威.1986.中国科学(A辑),3:234～242

井中.1990.自然杂志,10:682～688

吴文达.1991.中国科学院院刊,1:39

吴文俊.1977.中国科学,6:507～516

吴文俊.1978.科学通报,523～524

吴文俊.1984.几何定理机器证明的基本原理.北京:科学出版社

吴文俊.1986.吴文俊文集.济南:山东教育出版社,280～387

张景中,高小山,周咸青.1996.基于前推法的几何信息搜索系统.计算机学报,19(10):721～727

张景中,梁松新.1999.复系数多项式完全判别系统及其自动生成. 中国科学(E),29(1):61～75

张景中,杨路.1989.数学认识与实践,1:34～43

张景中.1982.面积关系帮你解题.上海:上海教育出版社

张景中.1991.自然杂志,1:55～62

张景中.1992.平面几何新路.成都:四川教育出版社

张景中.1994.平面几何新路——解题研究.成都:四川教育出版社

张景中等.1995.几何定理可读证明的自动生成.计算机学报,18(5):380～393

张景中.2000(5)计算机怎样解几何题,清华大学出版社和暨南大学出版社

张景中.2000.计算机怎样解几何题.清华大学出版社和暨南大学出版社,5:175～195

Chou S C, Gao X S, Zhang J Z. 1992. Automated Production of Traditional Proofs in Solid Geometry. TR-92-3(美国维奇塔大学计算机科学系研究报告)

Chou S C, Gao X S, Zhang J Z. 1994. A Collection Of 110 Geometry Theorems and Their Machine Produced Proofs using Full-angles. TR-94-10(美国维奇塔大学计算机科学系研究报告)

Chou S C, Gao X S, Zhang J Z. 1996. A Method Of Soving Geometric Constraints. M M Research Preprint, 14: 18～36

Chou S C, Gao X S, Zhang J Z. 1993. Mechanical theorem proving by vector calculation. In: Proc ISSAC-93, Keiv, 284～291

Chou SC, Gao X S, Zhang J Z. 1994. MachineProofs in Geometry. World Scientific, Singapore

Li H. 1996. Clifford algebra and area method. MMRC preprints, ISS, Academia Sinica, 14:37～69

Shang-Ching Chou. 1988. Mechanical Geometry Theorem Proving D Reidel Publishing Company

Tarski A. 1951. a decision method for elementary algebra and geometry

Wang D. 1997. Clifford algebraic calculus for geometric reasoning with application to computer vision. Automated deduction in geometry(D. Wang, ed.), LNAI 1360, 115～140

Wang Hao. 1960. IBM J Res Dev, 4:2～22

Wu Wen-tsun. 1983. Automated. Theorem proving: AMS, 235～242

Yang L et al. 1998. Automated proving and discovering of theorems in non-Euclidean geometries. Automated Deduction in Geometry(D. Wang, ed.), LNAI 1360, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 171～188

Zang J, Yang L, Deng M. 1990. Theoretical Computer Science, 74:253

Zhang J Z, Chou S C, Gao X S. 1992. Automated production of traditional proofs for theorems in Euclidean geometry. The Hilbert intersection point theorems WSUCS-92-3

Zhang S G, Yang H Q. 1998. Clifford Algebra and Mechanical Geometry Theorems Proving. in: Proc. Of ADG'98, Beijing

附　录

张景中小传与几何解题软件

中科院院士张景中教授1936年12月出生在河南省汝南县。1959年北京大学数学力学系毕业，1979年任教于中国科学技术大学，1986年任中国科学院研究员，中国科学院成都分院数理科学研究室主任，中国科学院成都计算机应用研究所副所长，1993年12月由国务院学位委员会批准为博士生导师，1995年10月当选为中国科学院院士，兼任中国计算机学会理事、中国科协委员，1997年当选为中共十五大代表。现为中科院院士、教授、博士生导师，任首都师范大学现代教育技术中心特聘兼职院士，兼中国科学院成都计算机应用研究所名誉所长。



张景中

1978年至1985年间，他在数学领域，特别是离散动力系统和距离几何中若干问题的算法方面，取得了一系列具有国际水平的成果，并用于解决国民经济建设中的实际技术问题。在微分动力系统研究领域，在度量几何、计算几何领域，取得了一系列令人瞩目的成就，受到了国际同行的赞许。1982年应用数学方法研制成功的“安全节能低噪声木工电磁振动切削工艺”获国家发明二等奖。1985年进行机器证明的研究，与合作者创立了计算机生成几何定理可读证明的原理与算法，使这一人工智能领域30多年来进展缓慢的重要问题有了突破性的进展，在国际上取得了公认的领先地位。1982年以来，发表学术论著150多篇（册）。专著《几何定理机器证明理论与算法新进展》于1995年获中科院自然科学奖一等奖，1997年获国家自然科学奖二等奖。

在研究之余，他还热心科普教育。1990年被中国少年儿童出版社审定为建国以来贡献突出的科普作家，1994年被中国儿童出版社评为十大金作家之一。1995年，“张景中教育数学”丛书（《教育数学探索》、《平面几何新路》、《平面几何新路解题研究》、《平面几何新路基础研究》）被评为“第九届中国图书奖”一等奖和“全国教育图书奖”一等奖。

现为中国科学院成都计算机应用研究所研究员、名誉所长，广州师范学院计算机教育软件研究所所长。从事机器证明、距离几何、动力系统、教育数学等领域的研究。他提出了系统的面积解题方法，并用于机器证明的研究，使几何定理可读证明的自动生成这个多年来进展甚小的难题得到突破。1997年后从事智能教育软件的研究开发工作。曾任中国科技大学教授，中国科学院成都计算机应用研究所研究员。现任广州师范学院教授，博士生导师，计算机教育软件研究所所长。1995年当选为中国科学院院士。张景中，现任中国数学会常务理事，中国数学奥林匹克委员会委员。先后在意大利国际理论物理中心，美国维哥塔大学等院校进行访问和合作研究。长期从事计算机科学和数学教育工作，发表论文百余篇，出版专著及科普书12册，是“几何定理可读证明自动生成”原理及算法的创建者，并开创了“教育数学”

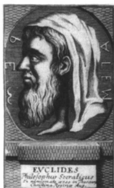
研究领域。

“Z+Z智能教育平台系列软件——平面几何、解析几何”是中科院院士、香港超世纪科技集团首席软件专家张景中教授率领的科研小组研制开发的一个具有国际先进水准的计算机系统。该系统是为普及电脑教学而设计的，它能结合数字、符号和图形工具，实现互动演算，并可支撑完整的编程环境。

最近北京双全天地科技发展有限公司推出的“双全智能教育软件”应用了“几何原理的机器证明”这一当前国际最先进的人工智能理论，该理论是我国著名数学家、中科院院士张景中教授及其合作者数十年研究的结晶，并获得目前国内IT学科最高奖——国家自然科学二等奖及中科院自然科学一等奖。由张景中院士亲自指导开发的“双全智能教育软件”基本覆盖了初、高中数理化全部内容，其最大的特点是智能解题、人机交互、自动推理和动态作图。它不仅能自动求解软件使用者提供的题目并显示解题过程，而且可以通过人机对话逐步解题，启发学生思维，指导学生学习解题的方法，而不是简单给出结论、判断正误，从而使计算机在很大程度上能够替代教师的传道、授业、解惑等工作，实现个性化教学，从而真正达到素质教育的目的。

16 欧氏几何的基石

本报告较详细地介绍了欧几里得几何的希尔伯特公理体系、黎曼公理体系与伯克霍夫公理体系，并对它们作了一定的分析和比较，还简略地介绍了国外近年来中学几何改革中出现的新的公理体系，这是一般教科书和文献上很少论及的。



欧几里得

一、几何的严密化与公理法思想

几何学的严密化源远流长，作为历史上发行量最大、流传长达 2300 年的数学巨著《几何原本》可以说是对几何(也是对数学）的第一次严密化，欧几里得的《几何原本》洋洋 13 卷，尤其是它的逻辑结构比世界上任何其他著作更大地影响了科学思想的发展，《几何原本》给出的一套逻辑结构是以 23 个定义以及包括平行公设在内的五个分设，还有五个公理作为基础的，并一共推导了大约 467 个定理，现代数学家把这一套公理体系称为实质公理体系，因此称《几何原本》为实质公理学的代表作，我们把它作为几何公理化的第一个发展阶段。第二个发展阶段则是从实质公理学向形式公理学的过渡时期，通过众多数学家长时间的努力，比如：皮亚诺的自然数系统算术公理和牛顿力学以及拉格朗日、傅里叶、波尔查诺、柯西等数学家对数学分析所进行的严密化研究之后，又使公理学进入到第三个阶段即形式公理学，而希尔伯特 1899 年的《几何基础》是这方面的奠基著作，它不仅一般地给出了欧氏几何的一个形式公理系统，而且具体地解决了一个严密的公理方法的逻辑上的要求。从这以后非欧几何、射影几何也分别有了它们相应的形式公理体系，在公理化运动的蓬勃发展中，希尔伯特对公理学的研究即把形式系统作为研究对象进行研究，把公理化运动向前推进到了公理学的高峰“元数学”。

希尔伯特的公理法思想是：从一些不定义的术语出发，由若干公理来规定这些术语的性质以及它们相互的基本关系，利用逻辑推理便能导出这些公理的推论、定理，从而得到相应的整个数学理论，此外他还要求整个公理系统必须具备独立性、相容性以及完备性。

二、欧几里得几何的公理体系

希尔伯特在文献（Hilbert D. 1958）中给出的五组二十条公理成为现今欧氏几何最常用的形式公理系统。他在规定了点、直线、平面三组元素为对象和术语“在……之上”、“在……之间”、“叠合、平行、连续”为对象之间的关系之后，列出了五组二十条公理，因较常见，这里不再赘述，只列举条目如下（Hilbert D. 1958）：

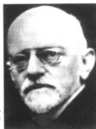
第一组——关联公理（1～8） ①

第二组——顺序公理（1～4） ②

第三组——合同公理（1～5） ④

第四组——平行公理（1） ⑤

第五组——连续公理（1～2） ③



希尔伯特

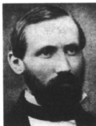
作为希氏样式的这套公理体系的三个逻辑要求在文献（Hilbert D. 1958）中都已进行了较严格的证明。



伯克霍夫

实际上希氏样式不过是欧氏几何的最常用的公理系统，随着公理化运动的发展，现今关于欧氏几何的公理体系还有黎曼式样的以及在 1943 年创立的伯克霍夫（G.D.Birkhoff，1884～1944）式样的，近年来又出现了改革式样的如 Edwin Moise 为 SMSG 写出的公理体系（Moise 公理）等。

自从 1958 年以后，世界上有不少国家几何教材体系的改革都以伯克霍夫的公理体系为基础。



黎曼

这里将通过对欧、伯、黎氏式样的简单的比较来介绍它们的大致内容，首先作一些记号的说明：规定定性的命题（即公理）记作 0，它们完全不包含数；而有关线测度和角测度的命题记为 1；那些有关数概念的命题记作 2；逻辑上的过渡用“→”来记之。

这样希氏式样的基本思想的逻辑顺序是 0→1→2。

而黎曼式样的基本思想的逻辑顺序是：2→1→0，黎曼曾用两点间的距离作为几何关系来研究几何，于是他把许多几何概念用两点间的距离来定义。例如，直线 AB 就定义为满足下面条件的点 P 之集合：A 到 P 的距离加上 P 到 B 的距离等于 A 到 B 的距离；圆定义为满足点 P 到点 O 的距离等于定距离 r 的点 P 的集合（其中 O 为定点）。黎曼的研究方法是：先从一些含数的公式开始，给出适当的定义，利用代数方法导出线测度和角测度的命

题，最后导出一些不含数的定性命题；这种思想学过微分几何或黎曼几何的人深有体会。

分析一下不难发现这两种方法各有一定的不便之处，希的方法对人们熟知的线测度和角测度有关命题的建立是较困难的；而黎曼方法却对许多比较直观的定性问题研究都要进行大量的繁琐的代数运算才能得到。那么能否有个两方面兼顾的方法，即一方面易研究测度问题，另一方面又易研究与测度无关的问题（定性问题）。伯克霍夫体系的基本思想就较充分地体现了这点，这种思想的逻辑顺序是：$0 \leftarrow 1 \rightarrow 2$，他从线测度和角测度出发，当然这是考虑到人们早已熟知刻度尺和量角器这两种测量线段和角度大小的工具的缘故，这样一来他可以同时直接地研究有关数方面的命题和定性方面的命题，故它既保留了希氏和黎曼的两种思想的优点，又回避了两者的不便之处。

下面对伯克霍夫的公理体系作一介绍：

四个不加定义的基本概念和基本关系为：

(i) 点，记作 A、B、C、…；

(ii) 直线，记作 l、m、…。

基本关系为：

(iii) 两点间的距离记作 $d(A,B)$，$d(A,B) \geqslant 0$ 且 $d(A,B)=d(B,A)$；

(iv) 三个有序点 A、O、B（$A \neq O$，$B \neq O$）构成角，记作$\angle AOB$，它是一个实数（$\bmod 2\pi$），点 O 称为$\angle AOB$ 的顶点。

这些基本概念和基本关系满足下述四组公理的要求：

公理 I（线的测度公理） A、B、C、…是任意直线 l 上的点，它们与实数 x 之间有一一对应的关系，对任意两点 A、B 有 $|X_A - X_B| = d(A,B)$。

公理 II（点－直线公理） 通过两点 P、Q（$P \neq Q$）仅有一直线。

公理 III（角测度公理） 通过点 O 的射线 l、m、…与实数 α（$\bmod 2\pi$）之间建立一一对应的关系，若 $A \neq O$，$B \neq O$ 分别是 l、m 上的点，则差 $\alpha_m - \alpha_l$（$\bmod 2\pi$）就是$\angle AOB$ 的测度。所有平角的测度都是 π。若点 B 在不通过点 O 的直线 r 上连续移动，则数 α_m 也连续变动。

公理 IV（相似公理） 若两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 对于某一常数 $k>0$ 有 $d(A',B')=kd(A,B)$，$d(A',C')=kd(A,C)$，且$\angle B'A'C' = \pm\angle BAC$，则 $d(B',C')=kd(B,C)$，$\angle C'B'A' = \pm\angle CBA$，$\angle A'C'B' = \pm\angle ACB$。

以上的伯克霍夫公理体系有一些方面比希尔伯特式样的公理体系更优越，即形式上以及推导上的简洁性等，但希尔伯特公理体系用得那么普遍其原因何在呢？我们分析首先是它在训练学生严格的逻辑推理能力有独到之处，其次是几百

年来的世袭几何教育大部分教师对它的使用是比较习惯的，而且它已经在理论上很完整；最后是它还具有这样一个特点，即只要保持希氏公理系中的①②③④不变，仅把⑤即平行公理（“过直线外一点在平面上仅有一直线不与它相交”）换成“过直线外一点在平面上至少可引二条直线不与它相交”（罗巴切夫斯基公理）便可得到罗氏几何的公理体系。

三、近年来国外中学几何改革中出现的新公理体系

近20年来由西方国家掀起的数学教育改革运动，已遍及全球，从各国所提出的方案看，其中分歧最大、争论最多，至今还很难看出较具体的趋势的，当推几何，在内容的取舍观点上，存在着“欧几里得滚出去”到“没有欧几里得，卫星上不了天”两个极端；“要几何代数化”到“加强欧氏几何公理体系的综合几何”两个极端以及“中学只要经验几何”到“初中就从公理体系并据以严格论证开始”两个极端，可谓莫衷一是。

对中学几何的改革有多种方案，在美国对于高中正规——形式几何，有分析法和综合法两种类型的方案，其中分析法有三个：①使用坐标方案；②使用向量法方案；③使用仿射法方案。而综合法方案包括：①用综合欧氏几何的传统方法方案；②用初等变换方法的方案。

在用综合欧氏几何的传统方案中 Moise 提出以下的所谓 Moise 公理，内容是：

(1) 结合公理

1) 每一平面内有3个不共线的点；

2) 每条直线上有实数那么多个点；

3) 每过2点有惟一一直线。

(2) 顺序公理

每一直线都分割平面。

(3) 合同与度量（连续）公理

1) 每对不同的点都对应一实数（这两点的距离）；

2) 直线上的点和实数可建立一一对应，使任意二数差的绝对值为它们对应点间的距离；

3) 给定直线上二点 P、Q，可选择坐标系，使 P 坐标为0，Q 的坐标为正数；

4) 每个角可对应0°和180°间的一个数；

5) 若射线 AB 在半平面 H 的边上，对于每一0°与180°之间的数 r，都恰有一射线 AP、P 在 H 内，使 $m\angle PAB=r$（此处 m 表示 Moise 角）；

6) 若 D 在 $\angle BAC$ 内，则 $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$；

7) 若二角形成一直线，则它们互补；

8) s.a.s. 即边角边。

(4) 平行公理

过不在已知直线上一点，没有多于一条的直线平行该直线。

可以看出 Moise 想降低希尔伯特公理系的抽象性，使之具体一些，以及减少推证定理，这种改革处理方案旨在完备传统欧氏原本的公理体系，不必使学生陷入过于深究依据的公理，要尽可能有效地把学生推动到几何的重要工作“积累有用的事实和发展证验技巧”；当前美国有的书已采用 Moise 公理体系。

上述公理体系虽然都非常完美，有的很现代，但是它们都有一个共同的缺点，就是公理体系与解题方法没有什么联系。能不能建立一种欧氏几何公理系统，使它与解题方法联系起来？我国著名数学家张景中院士就在这方面有所突破。

从 1975 年开始，他就以一种新的观点去考虑欧氏几何，他利用面积的方法去审视欧氏几何公理系统。1996 年他在《平面几何新路（基础研究)》一书中，成功地提出了欧氏几何新的公理系统（由 3 组共 11 条公理组成，可参见 [8])。这是值得我们大书一笔的。

参 考 文 献

张景中 .1996. 平面几何新路(基础研究). 成都:四川教育出版社

Birkhoff G.1932. A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor. Annals of Mathematics, (33): 239~245

Birkhoff G. 1959. Metric postulates for plane geometry. American Mathematical Monthly, (66):543~555

Edwin Moise E.1990. The college text Elementary Geometry from an Advanced Standpoint(3th edition), Addison-Wesley

Hilbert D.1958. 几何基础 . 江泽涵等译 . 北京:科学出版社

Remarks on the 20th century history of axiom systems for Euclidean plane geometry. http://www.math.uga.edu/~clint/2002/5200/history.htm

SMSG, 1960. Geometry(parts I and II) Student's Text and Teacher's Commentary, New Haven: Yale University Press

Moise E. Downs F. 1964. The high school text Geometry. Addison Wesley

17　数学建模教学工程的理论与实践

本报告为笔者1999年8月在全国数学建模教学与应用大会上的发言，探讨了普通院校数学建模教学工程的理论（即数学建模的教育建模），给出了一种分层次进行数学建模教育的新教学模式（即整合模式），首次提出大学三阶段数学建模教育的教育建模，并介绍了省级重点教研立项“数学建模教学工程”工作情况。

以大学生数学建模竞赛为中心的教学活动实际上是一个不影响正常教学秩序的规模相当大的大学数学教育的试验（叶其孝语）。这种大学数学建模教育从系统工程的角度来看就是数学建模教学工程，作为系统工程有其相应的要素和层面，而作为数学建模教学则又有其独特的教育模式。在开展了一些前期工作后，1997年我们向安徽省教育厅申报了教研项目“数学建模教学工程”，1998年正式批准为省级重点教研立项，经费2万元，经过两年多来的工作和探索，已取得较大进展，现将工作情况介绍如下。

一、大学数学建模教育的三个层面

数学建模教育可在研究生、大学生、中学生三个层次上进行，而在大学生这个层次上又可分为重点大学、普通大学、大专三块；从教育建模的角度来说，合理地划分层面，并相应地建立良好的教育模式和教育结构是至关重要的。

根据教育建模的理论，大学数学建模的教育模式总有相对应的教育结构，反之亦然，而变换教育结构常常导致教育模式的变换。大学数学建模教育模式有宏观、中观、微观三个层面，其中每个层面又有高、中、低要求的三个子层面。所谓宏观层面的大学数学建模教育，主要指高等院校中数学建模教育发展战略的模式，属大学数学素质教育的一个方面；而中观层面的大学数学建模教育，主要指各类学校数学建模教育的管理模式；微观层面的大学数学建模教育，主要指具体的数学建模教学模式。相对应的教育结构同样也有宏观、中观、微观三个层面之分，其中宏观层面指数学建模教育体系的结构；中观层面指数学建模教育管理的结构；微观层面指数学建模教学活动（含课程）的结构。

在全国的高校中普通院校占绝大多数，考虑到学校的师资、条件、学生的接受水平加之近年来扩大招生等因素，并根据近几年我们的实践，我们赞成宏观模

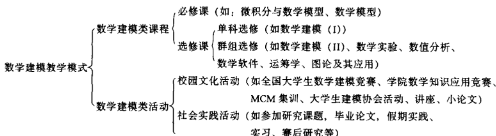
式采用以大学生数学建模竞赛为中心的教学活动，并且不影响正常教学秩序的大学数学教育试验，并认为对于普通院校的数学建模教育，采用中低要求的中观模式是适宜的。

二、微观数学建模的教学模式和教学结构

以下的讨论均在中低要求的中观模式下，探讨普通院校的数学建模的微观教学模式与教学结构。

数学建模的能力主要是应用能力，而应用能力有：应用意识与简单应用、按建模程序应用、针对实用问题的综合应用；从建模步骤和原则来看，一个人的建模能力包括理解实际问题的能力，抽象分析问题的能力，运用工具知识的能力，试验调试能力。

相应的微观数学建模的教学模式有活动、课程，如下示意图：



而相适应的数学建模教学结构，从内容上分析是如下模块的组合：

①应用数学初步；②数学建模基础知识；③数学建模基本方法；④数学建模特殊方法（如：图论、运筹学、统计、灰色理论、神经网络等）；⑤数学建模软件（Mathematica, Maple, Mathcad, MatLab）；⑥特殊建模软件（如 SAS，SPSS, MatLab 中各种工具箱，应用数学方法软件包，Lindo 等）；⑦经济、管理学中的数学模型；⑧机电工程技术中的数学模型；⑨生物、化学中的数学模型；⑩金融学中的数学模型；⑪ 物理学中的数学模型；⑫ 综合及其他问题中的数学模型。

三、大学数学建模的一种新教学模式——整合模式

在本节中，我们采用定性的教育建模方法，建立了符合系统科学三原理（即反馈原理、有序原理、整体原理）的数学建模的新教学模式，并介绍了我院的具体实现方案。

教育建模大多数是定性建模，定性建模的要点是：①在调查研究、理论分析的基础上抓住主要特征；②在明确目的、典型分析的基础上认识教育过程；③在

抓住特征、认识过程的基础上确定关键词语；④在集体讨论、统一认识的基础上给出简要表述；⑤在具体实施、反馈检验的基础上形成子模式群。

作者主持构建安徽机电学院大学生数学建模的教育模式，安徽机电学院现在是一所省属多科性高等工科院校和安徽省重点建设院校，2000 年的招生人数达 1800 人，现已有 8 个系，20 个专业，正向安徽工程科技学院方向迈进。近几年扩张迅速，数学建模教育取得良好成效。几年来在校大学生参加数学建模协会的人数逾千人，参加数学知识应用竞赛的学生逾 800 人，参加数学建模课程学习的人数达 1000 人，参加大学生数学建模竞赛集训人数达 200 人，参加全国大学生数学建模竞赛共 18 个队，获全国一等奖 2 个，全国二等奖 2 个，赛区一等奖 8 个，赛区二等奖 2 个，赛区三等奖 1 个，成功参赛奖 3 个。数学建模作为必修课程已列入三个理科专业，作为选修课除在全校设立外，还在部分系专业开设，数学建模课程已作为学院窗口课程，目前应用数理系拥有数学金融和建模实验室(共 40 台奔腾机)，教改成果"开拓数学建模教育，推进数学教学改革"获 1997 年省级教学成果二等奖，相关教科研课题达 4 项。参加建模的教师有 15 位，自 1995 年参加全国数学建模竞赛以来，参赛的学生中考取研究生的有 10 人，进研究所、设计院的有 5 位，还有进浪潮、春兰、阳光、埃力生、广电、中科大恒星、科苑、古井集团等大型企业。在就业时有极强的竞争力。而在 1995 年以前，安徽机电学院为国家教委黄牌警告学校，数学建模和全国大学生数学建模竞赛在该校是零。

经过明确建模目的，分析典型实例，抓住特征，认识过程，确定了一个关键词：整合模式，"整合"的意思是强调一个系统的整体协调，发挥综合优势。

整合模式充分重视上大学前、上大学期间、大学毕业继续学习这"三学"的整合，也充分重视大学一、二、三、四年级学习的整合，不断探索它们之间的连续性和衔接性，以利于提高数学建模教育效率。

整合模式充分重视核心课程（高等数学、数学模型或数学建模）、活动、潜在课程这三大部分的整合。

以下介绍我院施行的四年三阶段的新教学模式——整合模式（表 17.1）。

表 17.1

阶段	微观教学结构	微观教学模式
第一阶段（1～2年级）（目的：培养应用意识与简单应用能力）	1. 应用数学初步 2. 数学建模入门 3. 数学软件入门 4. 高等数学、线性代数应用例子和数学小实验	1. 数学建模协会活动 2. 数学知识应用竞赛 3. 讲座 4. 高等数学、线性代数中应用、软件、实验
第二阶段（2～3年级）（目的：培养按建模程序应用能力）	模块②、③、⑤ 加上模块⑦、或⑧、或⑨、或⑩、或⑪	1.《数学建模》课程开设 2. 群组选修课程（含潜在课程开设） 3. 部分校园文化活动和社会实践活动 4. 专题讲座 5. MCM 活动参与（列席参赛、初参赛）
第三阶段（3～4年级）（目的：培养针对实用问题的综合应用能力与研究意识）	模块④、⑥、⑫	1. 参加 C－MCM 2. 参加 C－MCM 集训 3. 毕业设计与毕业论文 4. 相关的校园文化活动（小论文、报告会、协会工作等） 5. 相关的社会实践活动（赛后研究、参加研究课题工作、课件制作等）

四、安徽省教育厅重点教研立项“数学建模教学工程”工作介绍

1. 1995 年以来，第一阶段（1～2年级）的工作

（1）1996 年组织成立了校大学生数学建模协会，并在建模教师们、院团委等的支持协助下，开展了讲座、上机、交流、报告会等一系列活动，目前该协会是学校最有影响的科技协会，每年发展新会员约 300 人。

（2）举办了 1999、2000 两届院数学知识应用竞赛，参赛人数分别为 359 人和 541 人次。

（3）在全校为学院团委科协举办相关讲座 8 个。

（4）编写了《高等数学辅导材料》，其中“高等数学知识应用实例选编”中收集了涉及高等数学各方面的应用例子约 20 个。

（5）在艺术设计系工业设计专业 98 级学生的线性代数课程中，补充开设“数学在图案设计中的应用”。

（6）在部分班级的高等数学与线性代数中补充数学软件相应功能的介绍和实

验的尝试。

2. 第二阶段（2～3年级）的工作

（1）连续5年开设了全校性的选修课（数学建模），已成为计算机科学与技术专业的必选课，在2000年新教学计划中已成为理科三专业：数学与应用数学、信息与计算科学、生物技术的必修课程。

（2）在部分系开设了相关的群组选修课程：计算数学、离散数学、工业统计、数学物理方程与特殊函数、运筹学等。

（3）举办了1999迎澳归杯数学建模竞赛、创办了数学建模刊物（油印）“建模风云”，编写了《Mathematica入门》、《安徽机电学院数学建模信息、简介》、《实用计算机数学建模》讲义等数学建模讲座资料。

（4）启用部分二、三年级同学参加（正式或列席）全国大学生数学建模竞赛。

（5）几年来举办全校性讲座有：

1）数学建模竞赛漫谈

2）数学就是力量——漫谈数学建模

3）数学建模ABC

4）数学建模的过去、现在和未来

5）全国大学生数学建模竞赛简介与数学怪论

6）数学建模实例——漂衣的最佳作法

7）数学与数学建模纵横谈

8）数学实验与两个实验例子

9）呼唤应用意识，话说数学建模

10）Mathematica入门与使用

11）建模中的图论方法（1）

12）商标几何学——数学建模在商标设计中的应用

13）常用建模方法和实例

3. 第三阶段（3～4年级）的工作

（1）参加了1995～1999年全国大学生数学建模竞赛与1998年美国大学生数模竞赛。

（2）组织学生参加1996～1999年MCM的集训、讲座、模拟。专题讲座有：

1）建模中的软件方法

2）建模中的图论方法

3）建模中的运筹方法

4）建模中的数值分析法
5）建模中的常用统计法
6）建模中的灰色方法
7）建模中的组合优化方法
8）场址问题建模及其物元分析介绍
9）建模实例——飞机的高空管理
10）建模实例——捕鱼问题的模型
11）建模实例——足球排名问题
12）建模实例——锁具装箱问题
13）大学生数学建模竞赛题和解法评析
14）微分方程的机器求解与 NPC 问题
（3）1998 年 11 月 29 日举办《全国大学生数学建模竞赛论文报告会》。
（4）指导学生完成正式论文 30 余篇，其中公开发表五篇。
（5）主持课题：
1）“实用板材最优下料，”省教委自然科学立项课题（1996～1998）
2）数学建模教学工程，省教委重点教研立项课题（1998～2000）
3）离散类数学的教学结构与实践，省教委教研立项课题（2000～2002）
4）工科高等数学，省教委省级重点课程（1999～2003）
（6）教改成果“开拓数学建模，促进数学教学改革”获 1997 年安徽省优秀教学成果二等奖。
（7）撰写相关论文多篇如：
1）关于质点组几何不等式的应用，中国科技大学学报，1996（4）
2）关于工科高等数学教育的几点思考，工科数学，1999（3）
3）关于截断切割问题的一个研究，工科数学，1998（4）
4）关于 95C－MCM A 题、B 题的几点评注，安徽机电学院学报，1995（2）
5）数学机械化，现代科技综述大辞典，北京出版社，1998.1
6）例证法，现代科技综述大辞典，北京出版社，1998.1
7）水星近日点进动的建模与摄动解，安徽机电学院学报，2000（4）
（8）完成教材《实用计算机数学建模》，安徽大学出版社，2000，以适应普通院校的数学建模教学需要，强调通俗、易学、精练、实用。
（9）购买并运用了多个软件包：如华东理工的《应用数学方法软件包》、郑州信息学院的《概率统计教学系统》，以及 Mathematica 4.0、MathCAD 7.0 等。

以上是“数学建模教学工程”这一立项的基本工作汇报，有些工作还才刚刚开始，今后，我们还将继续努力工作，扩大数学建模在普通院校乃至普通大专院校的师生中的影响，为实现真正的大学数学素质教育做出自己的贡献。

参 考 文 献

王庚 .2000. 实用计算机数学建模 . 合肥：安徽大学出版社
叶其孝等 .1998. 全国大学生数学建模竞赛教材 . (一)、(二)、(三) . 长沙：湖南教育出版社
查有梁 .1998. 教育建模 . 南宁：广西教育出版社

18　关于大学数学教育的几点思考

一、引　　言

大学数学教育与其他教育同样都面临“为什么教？教什么？以及怎么教?”这三个基本问题，但现状如何呢？我国大部分本科院校的数学教学内容都以《高等数学》或《微积分》为主，《线性代数》、《概率论与数理统计》等则根据各专业课时情况决定是否开设。教师一般只知道这些课程是上级的计划，多年的习惯常规。如果再问一个为什么？回答是它们是基础，应该是有用的。到底有何用？能说清楚的极少。至于如何教？在教学方法上，几乎是清一色的采用讲授法，由于内容多，学时少。为遵守大纲只能拼命灌，完全是一种注入式的教学。教师的理由很简单：这么少的学时要上完大纲或教学基本要求的内容已经不容易了，哪有时间用别的教学法。而专业教师却在不断地抱怨他们课程中要用到的数学（如拉普拉斯变换、傅里叶变换等应用数学知识）学生不会用或者还迟迟未上（如积分计算、矩阵计算等）。其结果是：大学数学教育又变成了一种应试教育，学生兴趣索然，只为考试过关而被动学习，更由于不知有何用？如何用？学过便束之高阁、抛之脑后。对此不少教师已麻木应付了事。几十年如一日。目前已进入信息时代，数字化前景诱人，数学的用武之地日益广阔。这种与现实社会发展相背离的状况已到了非改不可的时候，试想若将大学（特别是工科）现行的数学课程设立为选学基础课程之一，能有多少学生选学《高等数学》、《工程数学》、《线性代数》？现行学时量最大的《高等数学》或《微积分》是先辈们留下的珍贵遗产，但也是大学生沉重的负担，按目前的教学内容和教学方式它难学难用，是一道阻挡人们学习数学文化的“高门槛”。现实生活和工作中有多少是确定性现象而且又涉及连续函数的问题？对于随机性现象以及模糊现象、突变现象所相应的数学以及计算机科学的数学基础（如离散数学等）非常忽视，有的甚至一点不提。现代数学已大发展，“高新技术本质上是一种数学技术”，数学已被广泛用于各行各业，面对这日新月异的世界，继续沿用二三十年代的大学（特别是工科）数学教学内容、方法以不变应万变的方式已经再也不适合了。专家们曾讨论过有关的问题，以下笔者谈谈另几点思考。

二、大学数学教育中教师应充当什么样的角色

在大学数学教育中教师应充当什么样的角色？随着电视教育、远程教育的日益普及，这一问题就显得更加重要。在高校中任高等数学或微积分教学的教师与在电视中讲高等数学或微积分的教师有何不同？对于高校中教师应充当的角色，目前国内外流行如下几种看法：

1）布道的传教士；

2）照剧本（课本、教材）出演的演员；

3）运动队的教练员；

4）侦探长；

5）循循善诱的提问题者；

6）良师益友。

笔者认为现代大学数学教师应具有上述多重身份，并因材、因学时、因地的变换自己的角色，这也是与电视教育的根本不同之处。著名数学家哈尔莫斯说："最好的学习方法是动手，最差的教学方法是动口。"又说"最好的教学方法是让学生提问，解决，不是只传授知识——要鼓励行动。"因此"干中学"是基本的，而单纯的布道是最差的方法。对于教"如何?"，这时教师的作用应视为教练的作用。而对于教"为何?"，教师的角色应是循循善诱的提问题者，即用一些问题来为难学生，把学生引导到正确的方向上来。

三、大学数学教育究竟应教给学生些什么？

现代和未来大学数学教育应开设哪些课程？应组织哪些教学活动？这些课程和活动应使学生得到些什么？其中什么是最重要的？

21世纪将是高科技、信息时代，大学数学教育是为了培养具有跨世纪高数学素质的复合型，应用型人才，从教育这一角度出发，应使学生在数学学习中记住某些事情，能够使用和理解它；从数学智力因素这一角度出发，应注重培养学生的现代数学意识，它包括：

1）数学思想及观念（如向量思维、矩阵思维、函数思想）；

2）数学化（即数学建模意识）；

3）算法（计算方法、数学问题的计算机算法、数学软件的使用）。

从数学非智力因素这一角度出发，应注重培养学生的现代数学头脑，即精细、严谨（一丝不苟）、关注实际数值的精确度、表达的简明，以及坚韧不拔的毅力和不断设问的好奇心。

为此，有条件的学校，应增设《数学建模基础》、《实用数学技术》、《数学实验》、《离散数学》、《工业数学》、《计算数学》、《计算机数学》、《数学软件的使用》、《应用数学基础》、《常用统计方法》、《运筹学》等这类课程；无条件的学校，一方面可通过培训教师逐步开设此类课程，另一方面，也可通过在原有的数学课程中增加一些应用实例和一些数值算法实例以及上述课程的思想方法来弥补当前大学数学教育的不足。

过去我国本科院校对于数学教学活动是不重视的，除讲座、纯数学竞赛外几乎没有什么像样的教学活动了，受 1985 年以来美国大学生数学建模竞赛活动的影响，我国也于 1992 年开始了全国大学生数学建模竞赛活动，随着这一活动的日益普及和巨大影响；作为不影响正常教学秩序的大规模教改活动，有些省市教委提出要求原则上本科院校参赛队不少于 3 个队，专科院校参赛队不少于 1 个队。这项活动使学生在上述诸方面均受到了良好的训练和培养，是对课堂教学的一个极好的补充，学生在其中不但可以体验科研开发的全过程，还可以面对现实问题应用所学各科知识创造性地解决它们，因此应鼓励更多的师生参加到这项活动中来。值得提醒的是这项活动开展的时间还不长，其中的几个重要环节：动员、开设选修课或普及讲座、选拔集训、参赛（调研、建模、求解、检验、成文或软件、打印）、赛后总结与赛题的继续研究。都是值得充分重视的。继续举办各种数学讲座以扩大学生的数学视野仍是一行之有效的教学活动；这些都体现了“数学真正要办的事就是解决具体问题”，“问题和解是数学的心脏”（哈尔莫斯语）。

北大、清华和人大是中国综合大学、工科大学和财经大学的三面旗帜，普通院校应以它们为榜样注重教学生怎么做；因此上述数学素质中最重要的便是数学建模意识和基本的数学头脑。

四、关于大学数学的教育哲学与教学法

关于数学的教与学，笔者通过潜心研究和大量实践，有几个数学教育哲学观点：①数学是一个有机的整体，结构分明，错落有致，教与学的任务之一是认识它们；②课本中的数学通常是抽象枯燥乏味的，然而数学中处处有美且趣味无穷，教与学的任务之一也是揭露数学中的美与趣味，使学生感兴趣；③数学的理论严谨且高度抽象，似乎远离现实世界，其实数学的应用广泛更是它的一大特性，教与学的任务之一还是要反映数学的应用，使学生看到一个具有实用价值的数学；④数学又是一门实践性很强的创造性的艺术，教与学的任务之一更是要培养创新思维，我的口号是“做中学”。

为了完成上述任务，笔者曾尝试用各种教学法来实践，如整体教学法、改良

的摩尔教学法、布鲁纳发现法、波利亚教学法、学导式教学法、案例教学法等，整体教学法、案例教学法是用得最多也深受学生喜爱的教学法，可以用这样的比喻来说明整体教学法：传统的大学数学教育，对一台有多种功能的机器通常是按如下方式为学生介绍的，不厌其烦地拿出该机器的一个个零部件详细地介绍，在学生已经索然无味时，再告诉学生它们能组成一部机器，如何组装？如何用这台机器？这时已经没有时间了，只能一提了之，介绍效果可想而知。而如果先介绍并展示该机器的整体、组装、部件分布图及它的作用，再一个一个地拆下零部件讲解其作用、原理，最后再让学生亲手组装成功，其效果也是明显的。有人把数学比做一片茫茫无际的郁郁葱葱的森林，它枝繁叶茂、生机勃勃、硕果累累，为什么我们很多人都有见木不见林的感觉？如何既见木又见林？对认识达到结构运演阶段的大学生来说是极其重要的。在这一阶段要发展智慧，关键是要重视学科结构。这里的“结构”指一门学科的概念、原理、方法及其相互联系形成的整体。案例教学法有如解剖麻雀，麻雀虽小五脏俱全，一个能代表该理论、思想、算法等的典型例子（麻雀），不仅是学生理解抽象理论的钥匙也能另其印象深刻。笔者曾花大量的时间认真研究所教的每门课程的结构，并探索和搜集典型例子。从目前的使用来看效果是好的。

我常常想：一门课程的知识学过后不用一般数月后自然遗忘达 70%～90%，剩下的 10%～30%是什么？对教师来说应该着重教什么？对学生来说应该着重学什么？我们每上一门课应该要学生思考大学四年最重要的是学什么？

五、本科院校的数学教师现在应做什么？又能做什么

大学生到大学来应做三件事：“①学会如何做人；②学会如何思维；③学习和掌握必要的知识及运用知识的能力。”（杨叔子语）为教学生更好地做到这三件事，教师首先应提高自身的素质特别是数学素质，其次应学习《数学建模基础》、《实用数学技术》、《数学实验》、《离散数学》、《工业数学》、《计算数学》、《计算机数学》、《数学软件的使用》、《应用数学基础》、《常用统计方法》、《运筹学》、《模糊数学》、《小波理论》、《分形几何》等现代数学知识和真正做一点科学研究，特别是对 40 岁以下的中青年数学教师。

至于还能做什么？笔者就曾做过如下一些具体的事：

1）针对任教的专业搜集、积累相应的数学应用问题案例。

2）对原大学数学教学内容中重要的、关键的、实用的、复杂的部分适当地结合相关的数学史、数学美学、数学哲学、形象比喻、典型的应用实例、计算机数学等知识进行讲解。（如牛顿-莱布尼茨公式与数学史、欧拉公式和数学美、解析几何与笛卡儿的数学哲学、存在性证明与石油勘探比喻、微分方程与减肥问

题、近似计算与数值算法、数学计算与数学软件)。

3) 现代教学方法的局部使用，这里局部指大学数学的部分内容或部分班级或部分学生。(如对《高等数学(下)》中多元函数的连续、可微、偏导存在之间的关系采用摩尔教学法，对《计算数学》课程应用数学软件 MathCAD 辅助教学、对《计算数学》和《数学建模》的考试采用开卷形式)

六、好教师的标准

很久以来，人们将好教师等同于高职称或等同于学术论文数量多或等同于授课时数很多的教师，这是对好教师标准的一种曲解。哈尔莫斯说："检验什么是好教师，我的标准是非常简单的：这是一个以结果来判断工作的实用主义标准。如果一位研究生的导师不断地培养出能被称为数学家，能创造出高水平的新数学成果的博士，他便是位好教师。如果一位微积分的教师不断地培养出能成为杰出的数学研究生或能成为一流工程师、生物学家或经济学家的本科生，他就是位好教师。"故而类推地说：如果一位大学数学教师不断地培养出具有 21 世纪数学素质的各行各业的人才，他便是位好教师。

七、结　　语

考察计算机科学教育近年的发展历程对大学数学教育的发展是很有启迪的，20 世纪 70～80 年代计算机科学教育是先从语言如 BASIC、PASCAL、FORTRAN 等和微机原理、程序设计的学习开始的，最后再学应用如文字处理、造表、数据库管理等；那时的计算机仅为少数人即专业人员的天地；近几年的计算机教育迅猛发展，随着计算机的普及，计算机已走进了平常百姓家，究其原因恐怕与计算机教育顺序的改变即先学如文字处理、造表、数据库管理等（WPS、DOS、CCED、FOXBASE+、WORD、WINDOWS、EXCEL、FOXPRO 等），再学语言如 BASIC、PASCAL、FORTRAN、C、C++等和微机原理、程序设计等有很大关系。

1997 年高校理科数学与力学教学指导委员会上报国家教委的数学类新专业目录如下：

1) 数学与应用数学专业。含专业方向：数学，应用数学，数学教育。

2) 信息与计算科学专业。含专业方向：信息科学，计算数学及其应用软件，控制，运筹。

3) 统计科学专业。按新专业的设置，纯数学所占数学类的份额已经很小了。面向社会需要，注重数学的应用性，已是大学数学教育中的重要任务。

大学数学教育为何不能依照计算机教育的方式，先从实用数学技术、具体算法以及通用数学软件包开始入门呢？打开数学史，中国古代数学就是沿着实用数学技术、具体算法这条道走的，而目前的数学发展又回归到算法这条道上来了，只要我们掀开数学神秘的面纱，作为人们生产实践的一个重要的必不可少的现代工具的数学必将成为受青睐的学科。

参 考 文 献

戴维斯 P J.1991．数学经验．王前等译．南京：江苏教育出版社，1991
哈尔莫斯 .1990．解题的教学．王庚译．数学译林，(3)：256～258
王庚 .2003．实用计算机数学建模（修订版）．合肥：安徽大学出版社

19 高等数学的整体教学法

本报告首先探讨了高等数学的整体结构的三个层次，即宏观、中观、微观层次，并绘制了多个相应于高等数学教材（同济大学 1996）的各种关系结构图，其次给出了整体教学法及其三个子模式和实施步骤，还给出了笔者具体实施的作法。

发展认识论的研究指出，从 18～19 岁到 20～23 岁，人的认识可能达到结构运演阶段，这相当于大学时期。在这一阶段要发展智慧，关键是要重视学科结构。这里的“结构”指一门学科的概念、原理、方法及其相互联系形成的整体。

系统科学的整体原理（三原理之一，其余为反馈、有序原理）告诉我们，学习和研究的最佳策略应遵循这样的公式：整体→部分→整体*，即首先要认识大体印象初步轮廓的有机整体，然后再去研究部分，最后才能深入地认识完整的整体。

因此只有掌握一门学科的结构，才能更有效地解决涉及该学科的问题。

有这样一个比喻也许可以帮助我们理解这些论述，传统的大学数学教育，对一台有多种功能的机器通常是按如下方式为学生介绍的，不厌其烦地拿出该机器的一个个零部件详细地介绍，在学生已经索然无味时，再告诉学生它们能组成一部机器，如何组装？如何用这台机器？这时已经没有时间了，只能一提了之，介绍效果可想而知。而如果先把整个机器搬出来，介绍并展示该机器的整体、组装、部件分布图及它的作用，让学生明白为什么要制造这台机器以及制造这台机器的原理和图纸，再一个一个地拆下零部件讲解其作用、原理，最后再让学生亲手组装成功，其效果也是明显的。

有人把数学比做一片茫茫无际的郁郁葱葱的森林，它枝繁叶茂、生机勃勃，硕果累累，为什么我们很多人都有见木不见林的感觉？

而如果把高等数学看成一棵硕果累累的参天大树的话，那物质世界供它扎根，生产实践和社会实践促它发芽，科学技术滋养它成长。集合论、数理逻辑、数学哲学是它的巨大根系，一元、多元微积分、解析几何、微分方程、级数论是它粗壮的躯干和主枝，计算机高等数学算法、数学软件、数学实验、线性代数、概率统计、数理方程、复变函数等则是它茂密的分枝、新枝。其应用和高等数学建模等则是它的果实。

一、高等数学的结构及其功能

高等数学的结构有逻辑结构和认识结构之分，而两者的有机结合才是较好的教学结构，其次它还可从宏观、中观、微观三个层次上来研究，其功能是不同的。

在宏观上，研究高等数学在大学教育，以及在数学教育的中的位置与联系，关于这一点有关文章已有一些论述，强调了其重要地位，以及不可缺少性，至于具体的位置与联系说得不很明确（仍需进一步探讨），如与其他数学分支的联系。

在中观上，研究高等数学本身的内在联系，以及在本校适应的内在联系，相应的整体结构图参见图 19.1，图 19.2。

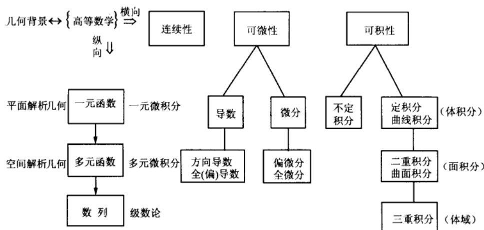


图 19.1 高等数学体系的总结构框图

在微观上，研究高等数学各个部件的结构，即各章的网络图。有两种角度，其一为知识网络图见洪继科（1993）的知识网络图（各章的），其二参见图 19.3，图 19.4。

当然以上三个层次均可以按认识论、逻辑学、教学论（包括学习论、技术论、艺术论）、价值论、方法论等多角度进行研究。

数学分析研究的对象是函数，整个理论就是考察函数的内涵、外延的结果，图 20.1 中横的方向是考察函数的内涵，研究方法是极限方法作为主线贯穿始终，去研究函数的若干性态以及局部变化状态和整体变化状态；纵的方向是考察函数的外延，多元函数的研究要以对一元函数的研究结果为基础等等。其他形式的结构图参见胡传孝（1997）中的高等数学知识结构表和谭肅（1985）中微积分内在

联系图（即结构图 IX）。

按通用高等数学教材（同济大学 1996），笔者将其中一元微积分学绘出教材体系结构图（图 19.2）。

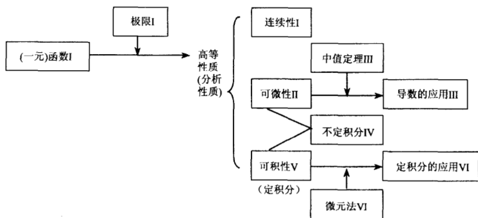


图 19.2 《高等数学》(上) 体系结构图

注：图中 I～VI 为高等数学教材（上）的相应第 I～VI 章，同理可以绘出高等数学教材的多元微积分的体系结构图

微观上，各零部件的体系关系结构图，如函数（部件）内容关系结构图（图 19.3）。

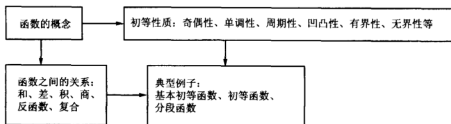


图 19.3 函数内容关系结构图

类似地可以绘出连续、极限、导数、不定积分、定积分、向量代数、空间解几、多元微积分以概念为主的零部件关系结构图，形象地称它们是高等数学关系学中的子图。

另一类是讨论应用和方法的内容联系图。如导数应用，定积分应用等，以下仅以导数应用为例介绍（图 19.4）。

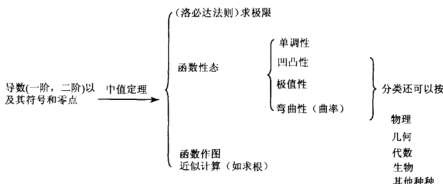


图 19.4 导数应用关系图

第三类如中值定理以及级数收敛判别定理、牛顿-莱布尼茨和奥斯特罗格拉茨基-高斯、斯托克斯、格林定理则可用命题之间的关系,⇨即要证明,⇍要举反例来体现。即是说微观结构图应多角度,尤其需根据选择适合内容特点的形式来绘制。就功能而言:宏观层次的主要是价值、方法、特点方面的功能。中观层次和微观层次是重点,它们既体现组装功能也体现原理。

从教育的意义上来说,它们的探索与强调恰给出了高等数学教什么?如何教?以及为何教?这三个问题的部分解答。

注:值得一提的是这里的结构与现代数学中以法国布尔巴基学派为代表的结构主义不同,在那里的模式是:公理→结构→联系→统一系统,在教育上的对应物是20世纪60年代末以后美国的《统一的现代数学》教材(中学数学)即新数学。

二、高等数学的整体教学法

1. 整体教学法(也称结构教学法)

最早就追溯至20世纪50年代美国心理学家布鲁纳的现代教学模式——结构模式,他强调课程结构的重要性,其特点可以简要概括为:结构中心,发现中学。它的基本教育过程为:获得→结构→转换→发现→评价,但并不成功,原因很多,如课程的编制、教师的水平、学生的程度等。

而目前的整体(教学)模式的主要理论依据是系统科学的整体原理,即任何系统只有通过相互联系,形成整体结构,才可能发挥整体功能。

整体教学模式为:整体→部分→整体*。

第一个“整体”是较为模糊、朦胧的整体;而“部分”在整体方法中强调从

整体出发，但同样重视分解为部分，以进行分析、综合；第三个“整体”是经过分解为部分之后，重新认识的有血有肉的整体，此公式为整体法的教学的最佳策略。

2．整体教学模式的三个子模式、步骤

模式 I（即“重视整体，逐步推进，增强能力”）——主体模式
模式 II（即“着眼教材，学科渗透，懂得联系”）——联系模式
模式 III（即“重视活动，强调参与，优化环境”）——活动模式
说明：

1）共性：整体$\xrightarrow{\text{体现个体}}$部分$\xrightarrow{\text{把握共性}}$整体*

2）不同之处在基本教学过程上，且 I 是最基本的，I 不完全包容 II、III，反之 II、III 也绝不能取代 I

运用时，首先应在重点实施模式 I 的基础上，根据实际情况选用 II 或 III，还可根据具体的教学性质作一定的变化或补充。

3）三模式的教学过程为

I 教师： 设计整体→分析问题→启发讲解→系统评价
学生： 鸟瞰整体→提出问题→讨论理解→自我评价
II 教师： 着眼教材→发散联系→收集整合→系统评价
学生： 钻研教材→发散联系→学会收敛→自我评价
III 教师： 选择活动→组织活动→观察活动→评价活动
学生： 明确意义→准备活动→参与活动→自我总结

3．笔者的作法

实际上在教学过程中适时适当地运用图 19.1～图 19.4 便可以得到一种既见树木又见森林的整体教学方法，上述的模式只是一些大原则而已，不一定生搬硬套，理当活学活用，笔者在教学中的作法总是先对教材作整体备课，再用这些框图作为游览图为初学的学生粗略地描绘一下高等教学领域的名胜古迹与游览路线，使学生心理上有一个整体印象，然后用不同的时间适当的时机去“工笔重彩”、细细描画，即所谓逐步细化，而当每一内容模块教完后，再用更详细的框图作总结联想。通常运用的范围可以是引子课、复习课、部件内容开始课等等，笔者也曾对线性代数、微分几何、解析几何、高等代数等作过整体设计，从实践效果看受到了学生的欢迎。

值得一说的是整体教学法既有较简单的一面，即都遵从整体公式；又有复杂的一面，即事先作设计三个层次的整体结构图的整体备课。故实践中因不同的课

型而选择多种教学模式才是上策。我国著名数学家华罗庚（1963）在序言中曾写道："有时分讲合温，或合讲分温，先把一个机器的零件一一搞清，再看全局，或先看全部机器的作用和目的，再分析要造成这个机器需哪些零件，而把条件一一讲明。'数'与'形'的'分'和'合'，'抽象'与'具体'的'分'和'合'都是在反复又反复的过程中不断提高的。"这段话对于我们整体法的教学实践是有启迪和借鉴作用的。

参 考 文 献

洪继科，曹助我．1993．高等数学知识网络．上海：上海科学技术出版社
胡传孝．1997．高等数学的问题、方法与结构．武汉：武汉大学出版社
华罗庚．1963．高等数学引论（第一卷）．一分册．北京：科学出版社
谭鬫，翟连林．1985．数学纵横谈．北京：科学出版社
同济大学．1996．高等数学（上、下）．第四版．北京：高教出版社
查有梁．1998．教育建模．南宁：广西教育出版社

20 “怎样建模”表及其应用

本报告首先根据多年的教科研实践创造性归纳出了“怎样建模”表，其次对该表作了进一步的阐述和注释，并介绍了它的使用说明和注意事项，最后以“雨中行”问题为例作了示范。



波利亚

一、“怎样建模”表

数学建模是根据需要针对实际问题组建数学模型的过程。由于这里的实际问题涉及面很广且这里的数学是指广义的数学，故而数学建模是一个较复杂的过程，人们从实践中曾总结过一个流程图（图 20.1），该流程图由于过于简洁，在实际数学建模时很难提供有效的、具有引导性且又自然的帮助。记得 1944 年美国杰出数学家波利亚（G.Polya）归纳了一张“怎样解题”表，它不仅世界闻名，而且影响了许多人，利用这张表，教师可以行之有效地指导学生自学，发展独立思考和进行创造性活动的能力。这件事给我们一个启示，能否将根据同行们的真知灼见以及个人的科研和数学建模教练经验，类似地归纳一个“怎样建模”表？

目前，业界尚未见到这方面的工作，8 年来笔者一直在做这项工作，并初步归纳出了一个类似的表，形式上与数学建模的实际流程更相近，这种行之有效的“怎样建模”表（表 20.1）。

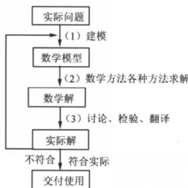


图 20.1　数学建模流程图

表 20.1 "怎样建模"表

步骤	名称(要点)	目的	方法提示
第1步	选题	确定研究问题	
	1. 难易度,2. 自己情况(如建模知识、计算机能力、理解程度、背景)。		简易模拟、分析法、经验法
第2步	识别问题	完成	
	已知是什么:数据、关系、事实、各种因素包括题中没有但相关; 查询问题涉及知识、来源、信息;它们可靠吗? 问题的类别:确定/随机,白/灰/黑,重点:解释/预测/控制; 它的各部分涉及的数学:内容、算法/方法; 问题的性质:有限/无限/NP; … 问题存在什么样的解答?要求什么?解答形式:数据、图形、关系、方法、决策等; 能否用一例类比、模拟?	问题的提出; 问题的分析; 基础假设; 弄清问题的特征、可能已有的模型; 掌握相应的数学知识、方法。	先简单,后逐步深入,化整为零,由初等到高等,调查法。
第3步	拟定建模计划	建立数学模型	
	寻找最简单的模型/基于已有模型的推广讨论/图解; 确定符号与单位,比较模型与实际问题,识别并列出相关因素,收集数据; 分析并给出所需的假设,草拟关系与方程; 选择适当数学方法进行模型设计。	按某种"规律"建立起变量、参数间明确的数学问题。	特殊方法(应有重点),常规方法。

续 表

第4步	求解模型	给出解法和结果	
	试用已学过的初等/高等数学方法； 试用了解的应用数学/离散数学/统计数学方法； 试用计算数学作数值计算/近似计算； 试用软件包/编程计算。	数据、表格、图形、函数、公式。	用各种数学方法和算法，各种数学软件包(Math, MathCAD, Mathcai, SPSS, MatLab, Lindo, QM 等)。
第5步	翻译数学解	描述	
	检查结果和计算的可靠性？合理性？ 在给定假设下，是你所希望的"最好"解吗？ 它全部的实际意义是什么？	数学解的实际意义。	直译/具体数据代入/分情况分条件。
第6步	检验、优化、推广	目地	
	1. 检验：①稳定性和灵敏度分析；②统计检验和误差分析；③新旧模型的对比；④实际可行性检验。 2. 改进：①能最大限度的降低数学复杂性；②能更符合实际？③考虑次要因素对结果的影响？④考虑部分重要的偶然因素的影响？ 3. 推广：①普适性；②对数据的依赖性减弱； 4. 评价：①准确性；②实用性；③方法的创造性；④优秀论文标准对照。	1. 模型的正确性； 2. 寻求更好的模型； 3. 若不满足题意，转第2步； 4. 模型的优缺点。	直观检验法、预测方法、随机数学、层次分析法、统计综合评价等。
第7步	写报告(译文)	完成论文	格式
第8步	打印论文	校样	Word 等

二、"怎样建模"表的使用说明与注意事项

1. 使用说明

通用方法为按表中步骤一步一步顺序进行，具体到每步时可参照表要点、

方法提示达到相应的目的。

若对表 20.1 作适当补充即成为大学生数学建模竞赛学生适用的 MCM 实际流程，作者运用了 8 年效果很好，它就像一个细心的教练，及时的给学生以帮助、引导。

2．注意事项

（1）要点、目的、方法提示可以根据个人和具体情况加以调整，使之成为面向对象型的“怎样建模”表。

（2）“怎样建模”表与图 20.1 的建模流程图以及数学建模的一般要求（如问题提出、问题分析、合理假设、建立数学模型、求解模型、检验、讨论等）是相适应的，使用时应注意合二或合三为一。

（3）“怎样建模”表具有一般性、通用性、共性，既可以作为数学建模者的指南，也可以作为科研工作者的参考。

（4）在表中作者按照思维的顺序和出现可能性大小的顺序搜集了一系列公式化的指导性意见，提出的方式也十分灵活，有时用建议的口气，有时则用引导性问题的办法，尽量顺乎自然，从创造心理学上来看，归纳一个这样的“怎样建模”表是可取的。

（5）值得指出的是该表中的提示，也涉及了一些数学建模的基础知识，需要通过学习了解。

三、应用实例

让我们选一个简单的例子来说明“怎样建模”表的使用。

“雨中行”问题

1．问题提出、问题分析

人在雨中沿直线从一处向另一处行走，当雨的速度已知时，问人行走的速度多大时才能使淋雨量最小？

这是一个开放性的问题，它没有任何数据。我们需要通过第一，二步采用恰当的方法，合理地描述本问题，分析问题，识别问题。

为了对此问题作有益的讨论，学生必须熟悉初等数学和初等微积分知识。

教师可以通过使问题具体化而使之有趣。如一个雨天，你有件急事需要从家中到学校去，学校离家不远，仅 1 公里，况且事情紧急，你不准备找雨具，决定碰一下运气，顶着雨去学校。假设刚刚出发雨就大了，但你也不再打算回去了。

一路上，你将被大雨淋湿。一个似乎是很简单的事实是你应该在雨中尽可能地快走，以减少雨淋的时间。但是如果考虑到降雨方向的变化，在全部距离上尽力地快跑不一定是最好的策略，试组建数学模型来探讨如何在雨中行走才能减少淋雨的程度。这样的描述使问题更加亲切和形象化了。

本问题涉及的因素主要有：①降雨的大小；②风（降雨）的方向；③路程的远近及跑得快慢，另外，人的身体的表面非常复杂。

显然问题的类别为确定型的，重点在控制策略，涉及确定性的数学，解答要求是决策，数据。

为简化问题，以下通过假设，从最简单的情形入手，逐步深入讨论。

2. 假设与符号

1) 降雨的速度（即雨滴下落速度）和降水强度保持不变。

2) 人以定常的速度跑完全程。

3) 风速始终保持不变。

4) 把人体看成是一个长方体的物体。

5) 不考虑降雨的角度影响（即在人行走的过程中身体的前后左右和上方都将淋到雨水）。

D——雨中行走的距离，h/米——人的身高，C/升——人身上被淋雨水总量

t——雨中行走的时间，w/米——人的宽度，d/米——人的厚度

v——雨中行走的速度，S——被雨淋的面积

I/(厘米/小时)——降水强度(单位时间平面上的降水厚度)

3. 建模与求解

我们需要通过表 20.1 中第三、四、五步来拟定建模计划，求解方案，翻译数学解。

首先寻找最简单的模型，然后考虑基于此模型再逐步改进，这里的关键是它是一个什么样的数学问题，显然淋雨量的度量方法至关重要。先可对具体数据进行模拟计算，立得

(1) 模型一：简单模型

若各参量取值单位一致，在整个雨中行走期间淋雨总量为

$$C = t \times (I/3600) \times S \times 0.01(\text{米}^3)$$

式中，$t = D/v$（秒），$S = 2wh + 2dh + wd$（米^2），S 是不变的（常量），v、t、I 是可以调节、分析的（变量），即

$$C = (D/V) \times (I/3600) \times S \times 10(\text{升})$$

若问题中设 $D=1000$ 米，$h=1.5$ 米，$w=0.5$ 米，$d=0.20$ 米，则 $S=2.2$（米^2）

若又设 $I=2$ 厘米/时，分析知 C 与 v 成反比，则人应以最快速度跑。如果人以可能最快的速度 $v=6$ 米/秒向前跑，这时 $t=167$（秒）$=2$ 分 47 秒。

这时，人身上淋雨总量为

$$C = 167 \times (2/3600) \times 2.2 \times 10(\text{升}) = 2.041(\text{升})$$

结果分析：这是一个荒唐的结果，人在雨中只跑了 2 分 27 秒，身上却被淋了 2 升的雨水（即大约有四酒瓶的水量），这是不可思议的，即不符合实际情况。

修改假设 5，考虑降雨角度的影响：

p——雨滴的密度（降雨强度系数），即在一定的时刻在单位体积的空间内由雨滴所占据的空间的比例数；

r——雨滴下落的速度/（米/秒）；

θ——降雨的角度（雨滴下落的反方向与你前进的方向之间的夹角）。

$I=pr$ 显然，$p\leqslant 1$，当 $p=1$ 时意味着大雨倾盆。

现考虑迎面情形再推至一般情形。

(2) 模型二：初等模型（图 20.2）

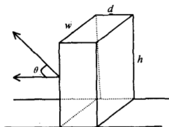


图 20.2

由于被淋湿的部分为顶部和前方，在时间 $t=D/v$ 内顶部雨水量为

$$C_1 = (D/v)wd(pr\sin\theta)$$

前方雨水量为

$$C_2 = (D/v)wh[p(r\cos\theta + v)]$$

故总雨水量为

$$C = C_1 + C_2 = \frac{pwD}{v}[dr\sin\theta + h(r\cos\theta + v)]$$

取常用参数值，如 $r=4$ 米/秒，$I=2$ 厘米/时，$p=1.39\times10^{-6}$（由 r、I 估算）于是

$$C = \frac{6.95\times10^{-4}}{v}(0.8\sin\theta + 6\cos\theta + 1.5v)$$

其中 v 和 θ 为变量。

因为 θ 为落雨的方向，可取代表值代替，故而问题化归为：给定 θ，如何选择 v 使得 c 是最小的。

讨论如下：

情形 I：$\theta=90°$，即雨滴垂直落下，这时

$$C = 6.95\times10^{-4}(1.5 + 0.8/v)$$

这时，C 为 v 的减函数，即 v 越大 C 越小，故 v 取人最大速度，如：$v=6$ 米/秒猛跑，得

$$C = 11.3\times10^{-4}\text{ 米}^3 = 1.13\text{ 升}$$

情形 II：$\theta=60°$（即雨滴迎面落下）。

$$C = 6.95\times10^{-4}[1.5 + (0.4\sqrt{3} + 3)/v]$$

分析同上，在 $v=6$ 米/秒时，取最小

$$C = 14.7\times10^{-4}\text{ 米} = 1.47(\text{升})$$

情形 III：$90°<\theta<180°$，即雨滴将从后面向你身上落下，令 $\theta=90°+\alpha$，$0<\alpha<90°$，这时

$$C = 6.95\times10^{-4}[1.5 + (0.8\cos\alpha - 6\sin\alpha)/v]$$

由分析知：当 α 充分大时，表达式可能取负值，不合理。回到原建模过程：

情况 1：考虑人行走速度慢于雨滴的水平运动速度，即 $v \leqslant r\sin\alpha$

$$C = C_{顶} + C_{背} = (D/v)wd[pr\sin(90^\circ + \alpha)] + (D/v)wh[p(r\cos(90^\circ - \alpha) - v)]$$

$$= pwD[dr\cos\alpha + h(r\sin\alpha - v)]/v$$

代入数据得

$$C = 6.95 \times 10^{-4}[(0.8\cos\alpha + 6\sin\alpha)/v - 1.5]$$

C 也是 v 的减函数，故人以最大速度即与雨滴水平方向速度相等 $v = r\sin\alpha = 4\sin\alpha$ 行进时

$$C = 6.95 \times 10^{-4}(0.8\cos\alpha)/(4\sin\alpha)$$

若取 $\theta = 120^\circ$，即 $\alpha = 30^\circ$，则 $v = 4\sin30^\circ = 2$（米/秒），这时

$$C = 6.95 \times 10^{-4}(0.8\sqrt{3}/2)/2(米^3) = 0.24(升)$$

情况 2：考虑人在雨中的奔跑速度比较快，快于雨滴的水平运动速度 2 米/秒，即 $v > r\sin\alpha$（人将不断地追赶雨滴）

$$C = C_{顶} + C_{前} = (D/v)wd[pr\sin(90^\circ + \alpha)] + (D/v)wh[v - p(r\cos90^\circ - \alpha)]$$

$$= pwD[rd\cos\alpha + h(v - r\sin\alpha)]/v$$

代入数据，$v = 6$ 米/秒且 $\alpha = 30^\circ$时

$$C = 6.95 \times 10^{-4}(0.4\sqrt{3} + 6)/6\ 米^3 = 0.77(升)$$

结论：1）如果雨是迎着人前进的方向向人落下，这时策略为以最大速度向前跑。

2）如果雨是从你的背后落下，这时策略为以落雨速度的水平分量大小为人的速度。

(3) 模型三：微积分模型（雨滴斜向落下，可能三面淋湿的空间情形）

假设将人视为长方体，其前、侧、顶的面积之比为 $1:b:c$，选择适当的直角坐标系，使人行走速度为$(u, 0, 0)$，设雨的速度为(v_x, v_y, v_z)，人行走的距离为 l，则行走的时间为$\frac{l}{u}$。

在此假设下，由高等数学中曲面积分的通量概念，显然单位时间内的淋雨量正比于（设 $\vec{A}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$表示稳定流动的不可压缩流体的速度场，$\Sigma$ 为场中一片有向曲面，$\vec{n}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$为 Σ 点（x，y，z）处的单位法向量，则 $\iint\limits_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}\,ds$ 叫做通量或流量。）

$$(|u-v_x|,|0-v_y|,|0-v_z|)\cdot(1,b,c)=$$
$$|u-v_x|+|v_y|b+|v_z|c$$

从而总淋雨量正比于

$$R(u)=\frac{l}{u}(|u-v_x|+a) \tag{20.1}$$

其中 $a=|v_y|b+|v_z|c>0$，于是，问题抽象成如下数学问题：在 l，v_x，a 已知条件下，求$R(u)$的最小值。

由于这个模型的特殊性，用图解法求解方便些，分下列几种情况讨论：

1）当 $v_x>0$ 时

$$R(u)=\begin{cases}\dfrac{l}{u}((v_x-u)+a)=\dfrac{l(v_x+a)}{u}-l, & (u<v_x)\\[2ex] \dfrac{l}{u}((u-v_x)+a)=\dfrac{l(a-v_x)}{u}+l, & (u>v_x)\end{cases} \tag{20.2}$$

当 $v_x>a$ 时，$R(u)\sim u$ 的图形如图 20.3 所示，由图可知 $u=v_x$ 时，$R(u)$取最小值为

$$R_{\min}=\frac{la}{v_x}$$

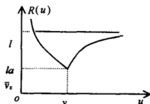


图 20.3

当 $v_x < a$ 时，$R(u) \sim u$ 的图形如图 20.4 所示，由图可知，当 u 尽可能大时，$R(u)$才会尽可能小(接近于 l)。

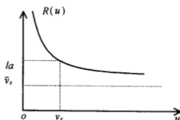


图 20.4

2）当 $v_x < 0$ 时

$$R(u) = \frac{l}{u}(u + |v_x| + a) = \frac{l(a + |v_x|)}{u} + l \qquad (20.3)$$

不论 v_x 为何值，$R(u)$都无最小值，即只有当 u 尽可能大时，$R(u)$才会尽可能小。

$R(u)$-u 的图形如图 20.5 所示。

3）当 $v_x = a$ 及 $v_x = 0$ 时，分别为 1)和 2)的特例。

综上所述，当 $v_x > a > 0$ 时，只要 $u = v_x$ 就可使总淋雨量最小，其他情况都应使 u 尽可能大，才能使淋雨量尽可能小。显然这符合人们的生活常识。

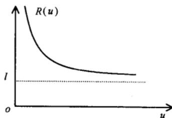


图 20.5

4．检验、讨论、推广

通过表 20.1 中第 6 步来进行模型的检验、讨论、推广，限于篇幅这里省略。

实际应用：雪中行、陨石行，三国的草船借箭，伞的设计。

参 考 文 献

李尚志 .1996. 数学建模竞赛教程 . 南京：江苏教育出版社

刘来福 .1998. 数学建模与数学模型 . 北京：北京师范大学出版社

王庚 .2003. 实用计算机数学建模（修订本）. 合肥：安徽大学出版社

D Ewards M Hamson. 1989. Guide to Mathematical Modelling. Macmillan Education ltd

Polya G. 1957. HOW TO SOLVE IT. New York: Doubleday Anohor Books

21　数学软件一瞥

随着计算机技术的飞速发展，计算机的应用已经进入到自然科学、社会科学和工程技术各个领域，甚至进入了家家户户的日常生活。

今天，计算机的应用早已远远超出人们通常用“计算”这个词的描述范围。人们用计算机做的工作早已不仅仅是数值计算和一般的数据处理，计算机在各种非数值计算方面的工作帮助人们解决了各个方面的难题。功能强大的计算机系统不仅是工程设计、经营管理不可缺少的助手，也已经成为科学研究工作者手中强有力的武器。

一、计算机数学系统综述

数字化时代的今天，人们把越来越多的计算分析任务交给了计算机去完成。但以往人们在计算之前，总是先找出计算方法，再编制计算机程序，然后才能进行计算而得到结果。随着 CAD 技术的蓬勃发展，人们梦想是否能有一个计算机数学系统（软件）当人们在输入一个数学公式、一个方程组、矩阵等之后，计算机可以按照人的要求直接给出结果，而无需用户去考虑方法以及中间步骤，整个过程就像人们天天使用的手持计算器一样简单。新一代的计算机数学系统把人们的这一梦想变成了现实。新一代的计算机数学系统主要指科学计算软件，它是面向一个或一类特定的科学计算用户需求的软件系统。由于科学计算的内容除了传统的数值方法以外，还包括符号运算、公式推导和逻辑推理、函数作图等。

科学计算软件大致可由以下几个功能模块组成：

1）基本科学计算模块，其功能是有效、可靠地完成各种基本科学计算，如大型矩阵计算、插值、逼近、求解非线性方程组、目标函数优化等。

2）面向不同工程对象的科学计算需求的模块，如结构分析、信号处理、大规模集成电路辅助设计等等。

3）符号计算与机器证明模块，它能完成各种公式推演、符号计算、数值计算与定理证明。

4）系统仿真、控制模块。

20 世纪 80 年代以来，国际上出现的新一代计算机数学系统就是代表，目前这类系统大约有上百种，它们大体可分为两大类：第一类为通用系统，具有数值计算、符号计算和图形功能、编程，都有适合于从工作站到微机使用的多种版

本。系统由符号计算语言和若干软件包组成。目前，典型的通用符号计算系统有：Mathematica，MatLab，Maple V，MathCAD，Reduce，Macsyma，Derive，Axiom，S-plus，CASC等，其中CASC是中国江西工业大学衷仁保研制的。第二类为专用系统，这类系统是为了解决数学、物理、理论化学或其他学科中的问题而专门研制的。例如，用于概率统计的SAS，STATISTICA，SPSS，用于运筹学的LINDO，OSL，数学应用的中文软件应用数学软件包，用于量子电动力学的ASHMEDAI，用于月球理论和广义相对论的CAMAL，用于高能物理的SCHOOHSCHIP，用于张量处理的SHEEP，用于天体力学的TRIGMAN，用于求有理函数方程解的ALTRAN，等等。正如计算机为数学提供了新的机会一样，数学也使得计算机变得不可思议地有效。数学为自然现象提供了抽象的模型，同时也为用计算机语言实现这些模型提供了算法，应用计算机和数学构成了一个紧密耦合的系统，它不断产生出以前不可能有的结果以及以前绝不可能想像的思想。(美国L.A.斯蒂恩语)

现在许多数学家、工程师、科研工作者已经开始用新一代计算机数学系统代替纸和笔进行计算。面对各种各样的实际问题所抽象出的数学模型，也需要各种数学方法，有的计算量是很大的，传统的手工操作不但繁琐且易出错，采用上述的软件包必将带来巨大方便。例如，要计算8阶矩阵的特征根，用手工计算，可能需要一天的时间，而且很容易算错；如果用高级语言编写程序，即使对于熟练的程序员，其工作量也是非常大的。但若用Mathematica，Maple等符号计算软件，则在几分钟内就可以得到结果。

符号计算软件（包括Mathematica，MatLab，Maple V，MathCAD等）是近20年来发展起来的新一代计算机数学系统，具有极强的计算能力。它们可以进行符号计算、公式推导、数值计算，具体说可以计算微分、积分、分解因式、解方程组（线性或非线性)、解微分方程、计算行列式、矩阵、画二维和三维图形等等。实际上，数学中可以计算的问题几乎大都可以用符号计算软件来完成。

此外符号计算软件还具有编程能力，对于具体的数学问题甚至对于整个数学分支，都可以编写相应的软件包。应用数学的工作者可以把符号计算软件看做是最基本的语言，如同计算机的工作者之C语言。鉴于符号计算软件的上述特点，新一代计算机数学系统常被誉为数学建模软件。在国际上，它们已经成了数学工作者、工程师、科研工作者以及数学应用者的得力助手，也是现代学生学习数学的重要工具。正如北京师范大学教授陈木法、何青所说：数学家可以把符号计算软件看做是最基本的语言，如同计算机学家的C语言。

二、通用著名的符号计算系统简介

通用的计算机数学系统不下几十种，常用的且在世界各地拥有较多用户的有：Mathematica 系统、MatLab 系统、Maple 系统、MathCAD 系统。它们被称为数学软件四大家，以下仅就版本、功能、特点作一简介。

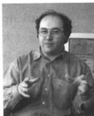
(一) Mathematica——一个用计算机处理数学问题的通用软件包

1. Mathematica 的发展史

用计算机做代数计算、符号计算的工作开始于 20 世纪五六十年代。在 70 年代人们开发了几个比较成功的计算机代数系统，其中最著名的是 REDUCE 系统和 MACSYMA 系统。它们被用在解决许多复杂的计算问题的工作中，取得了很大成功。

Mathematica 系统是美国物理学家 Stephen Wolfram 领导的一个小组于 1986 年开始开发的，很快他们成立了 Wolfram Research 公司，1988 年发布了 Mathematica 1.0 for DOS，当年被誉为一个强有力的数学软件包，1989 年 9 月该公司 Stephen Wolfram 等人又进一步完善和开发了改进的 Mathematica 1.2 for DOS，这是一个很好的 Mathematica 简洁版本，在美国和世界上广为流传，得到好评。1991 年又推出了 2.0 for DOS，对原有的系统做了不小的扩充（如扩充了二百多个系统函数和变量)，并在一些基本问题的处理上也做了一些改动；1992 年推出了 Mathematica 2.0 for Windows，1993 年先后又推出 2.1 for DOS/Win，之后又推出了 Math 2.2 for DOS/ Win 以及相应的学生版，Macintosh 版本，Unix 版本，Windows NT 版本等，它可适用于各种机型、不同的计算机系统、甚至工作站。现在的最新版本是 Mathematica 4.0 (1999) 和 4.2 (2002)。

作为 Mathematica 的开发者之一，Stephen Wolfram 1959 年生于伦敦，在牛津大学和加州理工学院受教育，1970 年在加州理工学院获博士学位，现任伊利诺大学复杂系统研究中心主任，物理学、数学和计算机科学教授。他负责 Mathematica 的总体设计，写了 Mathematica 核心的基本代码的大部分。


Stephen Wolfram

Daniel R. Graysun 是伊利诺大学的数学教授，他写了 Mathematica 的数学部分的许多内容，包括任意精度的算术运算、解方程、矩阵演算、幂级数和椭圆函数等。Roman E. Maeder 负责 Mathematica 的符号积分、多项式因式分解和其他多项式运算等部分。

Stephen M. Omobundro 写了 Mathematica 的三维图形程序代码。

2. Mathematica 的功能

(1) 数值计算

- 任意精度
- 高级的数学函数（如椭圆函数、超几何函数等）
- 矩阵运算
- 傅里叶变换
- 求近似值函数
- 积分
- 求根
- 微分方程
- 最优化及线性规划
- 数论函数

(2) 符号计算

- 代数简化
- 多项式分解
- 符号积分
- 解代数式
- 符号矩阵运算
- 列表运算

(3) 音像功能

- 函数及数据图形化
- 二维、三维、等高线及密度图形
- 三维物体视觉化
- 光源模型
- 高级图形描述语言
- PostScript 输出
- 动画 [大部分版本]
- 从函数及数据产生取样声音 [某些版本]

(4) 程序语言

- 会话式符号语言
- 列表、公式、图形、程序的一致性表示方式
- 过程语言的方式
- 函数语言的方式
- 转换法则的规范
- 规范表达式的模式识别

- 运行流程符号追踪

(5) 外部接口

- 从文件及程序的数据输入
- C、FORTRUN 及 TeX 输出
- 在外部程序中的函数调用
- MathLink R 高级外部程序连接通讯
- 文件及文字处理语言
- 国际字符集

(6) 笔记本式用户接口*

- 以文字、图形、声音和数字产生的会话式文件
- 层次式结构
- 以文体层次作文字处理的方法
- 标准图形及文字格式的转换
- 与远端计算服务设施的连接

3. Mathematica 的特点

Mathematica 系统的计算能力非常强，它的函数很多，其最大特点是在带有图形用户接口的计算机上 Mathematica 支持一个专用的 Notebook 接口。通过 Notebook 接口，我们可以向 Mathematica 核心输入命令，可以显示 Mathematica 的输出结果，显示图形、动画、播放声音。通 过 Notebook，我们可以书写报告、论文，甚至整本书。

另一个重要特点是它具有 MathLink 协议，通过 MathLink，我们可以把 Mathematica 的核心与其他高级语言连接，我们可以用其他语言调用 Mathematica，也可以在 Mathematica 中调用其他语言编写的程序。到现在为止，能够与 MathLink 连接的语言包括 C 语言、Excel、Word 等。事实上 Notebook 就是通过 MathLink 与 Mathematica 核心相连接的。因此我们可以通过 MathLink 设计自己的 Notebook 接口，这一功能为充分开发 Mathematica 的能力提供了保证。



Mathematica 4.0

* 目前 Machintosh，Microsoft Windows，NeXT 及 X Windows 系统都有这些功能。

(二) Maple V——一个对大众公开的计算机代数系统

1. Maple 发展史

Maple 作为一个计算机数学系统的名字，并不是某个英文词组打头字母的缩写，取这个名字主要是为了标明这个数学软件是加拿大生产的。Maple 是原生于加拿大的一种枫树的名字，加拿大国旗的图案就是这种枫树的叶子。

1980 年 9 月，加拿大 Waterloo 大学的符号计算研究小组成立，开始了符号计算的计算机实现的研究项目，数学软件 Maple 就是这个项目的产品。他们采用了当时最先进的算法编写 Maple 系统，Maple 系统每年都要更新，以吸收最好的算法。



Maple 9.0

Maple 的第一个商业版本 Maple Version 3.3 是 1985 年出版的，随后几经更新，到 1992 年，Maple V release 2 for Windows 面世后，Maple 即被广泛的使用，得到越来越多的用户。特别是 1994 年，Maple VR3 推出后，兴起了 Maple 热。1995 年 8 月又推出 Maple V Release 4，1996 年初正式出版，Maple 的功能更加完善。近 20 年来，参与加拿大 Water-Loo 大学这一项目的数学家、计算机科学家以及众多的 Maple 用户为 Maple 的发展付出了艰辛的劳动。目前，这仍是一个在研的项目，它拥有两个研究中心，一个在加拿大的 Waterloo 大学，另一个在瑞士的 Zuris。世界上 Maple 的用户对 Maple 及 Maple 的发展更加充满信心，因为，一旦掌握了 Maple，个人的数学处理能力将与 Maple 同步发展。

2. Maple 系统的功能与特点

Maple 系统的功能基本与 Mathematica 类似，它适合于在多种计算机上使用，它主要由三部分组成：用户界面 (Iris)，代数运算器 (Kernel)，外部函数库 (External library)。与 Mathematica 相比，Maple 有三大特点：一是在一个作业面 (Worksheet) 中每一个变量都被留存，这给使用者带来很大方便，我们可以反复使用已计算过的式子。二是它的界面非常友好，帮助菜单非常丰富，简单易学，拥有大量的软件包，很适合初学者学习使用。三是它有一定的决策能力，在一些情况下 Maple 可以选择合适的算法。此外，它还有可以在较小内存的计算机上正常使用的好处。

总之，Maple 是一个功能强大、容易掌握、不断发展的计算机数学软件。有了良好的数学基础加上 Maple 就能使你如虎添翼，有能力和信心去解决各种各样

的数学计算问题。

(三) MathCAD——一个交互式数学软件

1. MathCAD 发展史

MathCAD 是美国数学软件公司 1989 年推出的，从早期的 DOS 版（2.0, 2.5），3.0 版开始则是 Windows 风格，经 4.0 版、5.0 版，目前已出了 MathCAD PLUS 7.0～11.0，鉴于 MathCAD 的程序看起来就是一篇文章，图文并茂，程序与运行结果浑然一体，数学式子与标准出版物几乎完全一样。还因为它的高效、易用、所见即所得、贴近传统习惯的风格。故而可与 Mathematica 等软件媲美，成为广为流传的数学软件，受到业内人士的青睐。

2. MathCAD 的功能与特点

基本功能可以形容为一个超级计算器、一个超级绘图仪、一个优秀编辑器、一张奇特草稿纸、一位很好的数学专家。早期的 DOS 版本规模小，对计算机要

MathCAD 工作页

求少，2.0 版本无三维作图、符号计算处理、草稿纸等功能，只限于二维作图、数值计算等。今天的 MathCAD PLUS 7.0 有着众多的优点：屏幕好像一张电子便笺，只要你用 MathCAD 语言和它沟通，转眼间科学计算的结果和精美的图形

立见。它又是一种特别的写作语言，用它写成的电子书，不仅便于查阅，而且它是活的，你改它一个式子，一个符号，它会马上变化相应的图。你可以作各种数学模型试验，这些数学模型能描述各种自然和社会现象。

6.0 版本新增了“M++”编程语言、动画、设计、网络功能，新增大量的内部函数。它还具有最丰富的数据结构，作为法宝，它可以自定义运算符。值得一提的是 M++程序本身就很像大家熟悉的流程图，且是可运行的“流程图”。此外，这一新版本特别适合于设计科学教育动画，且十分方便，可作为数学 CAI 的一个理想的支撑环境。它提供 30 种 MathCAD 电子书的样本，它提供动画开发工具，它提供极其丰富的科学计算函数库，它提供网络接口和超链接，它提供图文并茂、所见即所得的二维排版系统，它提供“不必说如何做，只需说做什么”的支撑环境，又有一块能表达任何算法的“七巧板”。

MathCAD PLUS 6.0 在你面前展现的，正是一种崭新的学习法和数学方法，无论对于学生、教师都是充满吸引力的。

（四）MatLab——一个科学与工程计算、系统控制仿真软件包

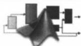
1. MatLab 发展史

MatLab 是“Matrix Laboratory（矩阵实验室）”的缩写，它是由数值分析领域很有影响的美国学者 Cleve Moler 博士首创开发的，1980 年 Cleve Moler 等人推出的交互式 MatLab 系统，逐渐受到了控制界等领域的研究者的普遍重视；自 1984 年 MatLab 推出正式版本后，陆续推出 4.0 版、4.2 版以及现在的 5.0 和 5.1 版。最新版本为 6.5 版。



莫勒

值得指出的是该系统原本并不是专门为控制理论领域的学者使用的，它的最初目的是为线性代数等课程提供一种方便可行的实验手段，该软件出现以后一直在美国的 New Mexico（新墨西哥）等大学作为教学辅助软件使用，并作为面向公众的免费软件广为流传，后由于它的使用极其容易，且提供了丰富的矩阵处理功能，很快引起了控制理论领域的研究人员的注意，他们在它的基础上开发了控制理论与 CAD 专门的应用程序集（又称为工具箱），使之很快地在国际控制界流行起来，目前它已经成为国际控制界最流行的语言了。近年来，除了流行于控制界以外，MatLab 还在诸如图像信号处理、生物医学工程等相关的领域中有广泛的应用，并且出现了数以百计的各种实用工具箱，而这些工具箱反过来又进一步促进了 MatLab 的应用。



MatLab

2. MatLab 的功能和特点

MatLab 当前的功能可以说是集可靠的数值运算（特别是但不局限于矩阵运算）、图像与图形显示及处理、高水平的图形界面设计风格等于一身。它的另一个明显的优点是程序非常简洁，如同 Mathematica 等系统，MatLab 的主要特点为：

- 面向对象特性，图形、窗口等都是对象，可以通过属性改变它们；
- 单一的数据结构：矩阵（你无须定义变量）；
- 矩阵自动动态伸缩；
- 矩阵的大小几乎可以是任意大（只同虚拟内存有关）；
- 编程简单：BASIC 一样的命令语言；
- 变量不用定义，功能强大的图形处理与数值计算功能；
- 系统扩充方便，可以随时向系统增加函数；
- 先进的帮助系统：demo 演示程序、程序头部由“%”开始的部分自动成为帮助文字；
- 与 C 等语言的接口；
- 与 Word 6.0 的无缝结合，Word 里可以直接使用 MatLab 功能；
- 符号推导、数理统计、自动控制等扩充工具库。

此外，控制界很多学者将自己擅长的 CAD 方法用 MatLab 加以实现，产生了大量的 MatLab 配套工具箱，如控制界最流行的控制系统工具箱（control systems toolbox）、系统辨识工具箱（system identification toolbox）、鲁棒控制工具箱（robust control toolbox）、多变量频域设计工具箱（multivariable frequency design toolbox）、μ 分析与校正工具箱（μ-analysis and synthesis toolbox）、神经网络工具箱（neural network toolbox）、最优化工具箱（optimization toolbox）、信号处理工具箱（signal processing toolbox）以及仿真环境 SIMULINK。参与编写这些工具箱的设计者包括国际控制界的名流，如 Alan Laub, Michael Sofanov, Leonard Ljung, Jan Maciejowski 等这些在相应领域的著名专家，这当然提高了 MatLab 的声誉与可信度，使得 MatLab 风靡国际控制界，成为最重要也是最流行的语言之一。

三、专用计算机数学系统简介

专用计算机数学系统不下几百种之多，以下仅就常用的统计分析系统、运筹学数学软件、应用数学方法软件作一简介。

1. 国际通用统计软件简述

尽管统计软件种类繁多，但常用的也就是六七种。在生物医学界，SAS、SPSS、STATISTICA、BMDP、GLIM、Genstat、epilog 和 Minitab 用得较多。这几种软件具有如下性能：可用性、数据管理、文件管理、统计分析、容量，在某一方面有独到之处，比如：SAS、SPSS、STATISTICA。

SAS 为 Statistical Analysis System 的缩写，自美国 SAS 软件研究公司于 1972 年首先推出第一版以来，6.04 版本以前为 DOS 下的，最新版本为 SAS 6.12 for Win 版本或 SAS 6.12 for Win95 版本。它是大型集成应用软件系统，具有完备的数据访问、数据管理、数据分析和数据呈现功能。已被 120 多个国家和地区的 31 000 多个机构所采用，直接用户超过 350 万人，SAS 系统广泛应用于金融、医疗卫生、生产、运输、通讯、政府、科研和教育等领域。全套软件产品包括 10 个产品模块。其核心模块为 Base SAS，具有数据管理、处理、计算常规描述统计量等功能，模块 SAS/STAT 是一个完整可靠的统计分析软件包，它包括了所有的实用统计分析方法，如：回归分析、方差分析、主成分分析、因子分析、相关分析、判别分析与聚类分析、属性分析和生存分析等，还有用于计量经济与时间序列分析的专用模块 SAS/ETS；用于运筹学和工程管理的模块 SAS/OR；用于质量控制的模块 SAS/QC；功能强大的面向矩阵运算的编程语言 SAS/IML 等。中国北大概率统计系为其咨询代理。

与 SAS 齐名的是 SPSS，自美国 SPSS 研究公司 1970 年推出第一版以来，目前的最新版为 SPSS 12.0 for Win，SPSS 是 Statistical Package for the Social Science 的缩写，它在行政管理和社会科学领域有众多的用户。它的数据管理和描述性统计分析功能很强。相对来说，其多元统计分析功能还不够强。

而由 STATSOFT Inc. 自 1984 年推出 STATISTICA 以来，最新版本为 STATISTICA for Windows Release 6.0，该软件易学易用且功能强大，作为统计专家它具有 18 项功能，几乎涵盖了概率统计的各个部分，它只需输入一张数据表，即可方便地使用完善的菜单，指指点点便可进行概统分析。

2. 运筹学软件——LINDO

运筹学是研究用科学方法来决定在资源不充分的情况下如何最好地设计人—机系统，并使之最好地运行的一门学科。它包括：数学规划（线性规划、非线性规划、整数规划、0-1 规划、动态规划等)、图论、对策论、决策分析等。

LINDO 是 Linear INteractive Discrete Optimizer 的缩写，是 Linus Schrage 于 20 世纪 80 年代初开发的优化计算软件包。目前广为流行的是 LINDO 5.02/PC 学生版和由 LINDO Systems Inc. 推出的 LINDO /PC Release 6.01（1997）、

LINGO4（LINGO/PC version4.0（1998）），前者是DOS下的版本，它包括LINDO, GINO, LINGO和LINGO NL（LINGO2）等几个组件以及相应的例子文件。它可用来求解线性规划、整数规划、二次规划、非线性规划等问题，也可以是大型或大规模的问题。后者是Windows下的版本，可解约束为50个，变量为100个的规划问题。

3. 应用数学方法软件包及其计算机辅助教学系统（MathCAI）

这是由我国华东理工大学数学系，从1985年起，用了十几年的时间，逐步积累，不断改进，用PASCAL自行开发出的。最新版为2.0 for DOS中文版，3.0版软件系统可运行于Windows中文版。

由于是全中文，且含有各种最常用的应用数学方法，故非常适于中国学生和应用数学工作者使用。

应用数学方法软件包（3.0版）含有各种最常用的数学方法，它由下列六个模块组成：

①图像显示　　②最优化方法

③回归分析　　④常用统计方法

⑤多元统计方法　　⑥线性代数计算

共包括一百多个软件，这些软件可以在系统中作为一个整体运行，也可以脱离系统分别运行。全中文，且含有各种最常用的应用数学方法，故非常适于中国学生和应用数学工作者使用。

这套“应用数学方法软件包”有以下一些特点：

(1) 这次升级后的3.0版软件系统，可以顺利地在中文Windows系统下运行。整个系统的外部框架，是一个用Delphi语言开发的Windows程序。从界面来看，窗口、菜单、对话框、标题栏、滚动条、按钮，都是标准的Windows风格，只要按按鼠标，就可以完成各种操作。同时它还充分发挥了Windows程序的多媒体特长，用户电脑只要带有声卡和音箱，就可以一边运行程序、一边欣赏美妙的MIDI背景音乐，系统中存有几十首MIDI音乐，包括许多世界名曲，可以让用户任意选择。系统打开后，如果用户不按任何键，系统会自动运行屏幕保护程序，屏幕上会出现五彩缤纷、不断变化的美丽图案。真正做到了有声有色、赏心悦目。

(2) 对六个模块中的每一种数学方法，都有“数学原理”、“使用说明”、“操作演示”、“实际运行”四项功能可供用户选择。如果用户选择“数学原理”，则可以在文本阅读窗口中，阅读到关于这种数学方法的简要的数学原理。如果用户选择“使用说明”，则可以在文本阅读窗口中，了解到关于这种数学方法软件的

详尽的使用说明。如果用户选择“操作演示”，则可以观看这种数学方法软件的操作演示。进入演示程序后，用户不需要打入任何命令，只需要连续按鼠标键或键盘上的任一键，就可观看一步一步的自动操作演示，还可以看到相应的汉字解说。如果用户不想再看下去，只要用鼠标点击右上角的［X］或按［Alt + X］键就可以使演示随时中断。这样，无须教师辅导，用户只要通过观看演示，就可以轻松愉快、方便迅速地学会软件的使用操作。如果用户选择“实际运行”，则可以实际运行这种数学方法软件。

(3) 软件包中的数学方法软件，都带有完全中文化的窗口菜单式的人机对话界面，运行时，用户不需要编写任何计算机程序，不需要背记任何命令，只要在菜单中作一些简单的选择，输入必要的数据、函数表达式，回答几个询问，就可以完成全部操作，得到所需要的计算结果。还可以按［F1］功能键打开帮助窗口，获取在线帮助。界面十分友好，使用非常方便。

(4) 系统中各种软件，在运算时，采用了高精度数字类型，有效数字一般都在 12 位以上，最多可达到 20 位。在线性代数模块中的各个软件，还可以让用户按分数形式输入数据，内部运算按照分数来运算，计算结果也用分数形式输出，这样就可以做到完全精确，避免了由于分数化为小数而产生的误差。

(5) 软件包中任何软件的输入数据和计算结果，除了在屏幕上显示以外，还可以根据用户的需要，以纯文本文件的形式存放在磁盘上。这些文件可以在软件包中各软件之间通用，可以在各种常见的文字编辑软件（例如 Windows 下的 MS-Word 文字编辑软件、WordPad 写字板、NotePad 记事本等）中打开观看，可以编入论文，作为论文的一部分。如果需要，还可以利用文字编辑软件的打印功能，将这些文件打印出来。

(6) 软件包中的软件运行时得到的计算结果，凡是可用图像显示的，都可以用平面图像或空间图像的形式显示在屏幕上。用户可以用键盘控制图像的放大、缩小、移动、旋转，还可以用“取景框”截取屏幕图像，生成 BMP 通用图形格式的图形文件，存放在磁盘上。它们可以在各种常见的图形编辑软件（例如 Windows 下的 MS-Paint 画图软件）打开观看、修改，也可以被 MS-Word 文字编辑软件调用，作为文章的插图。如果需要，还可以利用这些编辑软件的打印功能，将图像打印出来。

(7) 软件包中，有不少软件（例如，做任意函数图像的软件、做非线性最优化的软件、做非线性回归的软件等等），带有让用户输入任意函数表达式的功能。在程序运行中，会出现一个表达式输入窗口，让用户写入需要作图、作最优化、或作回归的函数表达式。如果用户写错了，会自动检查错在哪里，让用户修改或重新输入，如果没错，会自动将函数表达式编译、连接到软件中去，然后运行，完成各种操作运算。包括几十个可在 DOS 下分别运行的完全中文化的软件。

软件中带有一个帮助用户学会如何使用“应用数学方法软件包”的计算机辅助教学系统。在这个系统中，对软件包中的每个软件，都有“数学原理”，“使用说明”，“实例演示”，“操作练习”四项功能可供用户选择。实际上，进行操作练习等于使用软件。这样，无须教师辅导，用户就可以轻松愉快地通过自学，学会“应用数学方法软件包”中各个软件的使用操作。

此外还有许多专用软件包如：QM 定量分析软件包、QSB、DS 等。

参考文献

刘元高，刘耀儒 .2000．Mathematica4.0 实用教程．北京：国防工业出版社
叶其孝 .1998．大学生数学建模竞赛辅导教材（三）．长沙：湖南教育出版社
张韵华 .2001．符号计算系统 Mathematica 教程．北京：科学出版社

22　大学数学教学中数学建模的融入

本报告是笔者在2002年5月在黄山召开的全国数学建模中青年骨干教师培训班上的特邀报告，首先阐述了大学数学教学中融入数学建模的目的、意义、内容、原则，其次探讨了大学数学教学中融入数学建模的方法，最后介绍作者实践过的一些作法。

一、大学数学教学中融入数学建模的目的、意义、内容、原则

中国人民大学校长纪宝成说："大学应教给学生什么？是创新意识、创新思维、创新方法、创新能力，创新应是大学的办学理念，也是一所大学的灵魂。而这种被称为灵魂的东西，需要教师去传授……"

大学要培养关注现实、理论联系实际，适应社会需要的高素质人才。

大学数学教学的目的：培养具有跨世纪数学素质的复合人才，应注重培养学生的现代数学意识（如数学思想及观念、数学化、算法）和现代数学头脑，关注实际数值的精确度。表达的简明以及坚韧不拔的毅力和不断设问的好奇心。

1. 融入数学建模的目的

融入数学建模的目的是培养和提高大学生的数学素质，以改变大学数学教学长期以来应试教育为主的局面，给大学生以完整的大学数学教育。数学应用和数学建模属素质教育范畴，在数学课堂上正常地传授数学素质（数学应用意识、思维、方法、能力），还大学数学素质教育应有的地位，因为数学应用的钥匙即为数学建模，故融入数学建模更在情理之中。

2. 融入数学建模的意义

根据素质的核心理论，如四区理论即关于人的行为具有两元性和两重性的交叉理论，中国的教师和大学生恰恰是过于注重确认行为和角色期待、忽视个体的独立自主的行为，过去鼓励"角色行为"而抑制"独立行为"，过于重义务而轻权利，过于重服从而轻自主，过于重外在的纪律而轻内在的能动，这些都是中国教育存在的"症结"。

中国的教育（包括大学数学教育）使"自主行为"即人的创造活动最集中的

区域成为素质教育的盲区。而数学建模在克服上述症结有其优势，实践表明数学建模对于调动大学生的“人的创造活动——自主行为”有积极意义。

中国人小学、中学搞应试，到了大学不能再搞应试了，是到了搞素质教育的时候了！

3．融入数学建模的内容

结合相应的大学数学课程，融入相应的数学建模（模型和技术）如：高等数学应融入微积分应用、微积分模型、常微分方程模型与微分方程建模方法、例子等，可以是只涉及某章、某节（单个知识），也可以涉及几章（综合），还可以是已学几门课程的（大综合）。

具体内容：应用例题、数学建模实验、数学建模案例、数学建模问题、数学建模软件、方法等。要强调的是一定要与相应的课程紧密结合。

20 世纪 90 年代叶教授曾提出以“数学建模竞赛为中心不干挠正常教育秩序”的大规模的教改，通过十年的实践和人们的共识，进入 21 世纪后，数学建模已进入了一个“逐步融入大学数学教学”的时期，由于两种教育观以及学时紧张、教材、师资、大学管理者、大学生的意识、条件等各种因素。在一开始作融入工作时应注意以下几个原则。

4．融入数学建模的原则

原则 1：循序渐进，逐步渗透。

原则 2：宜少而精，忌大而泛。

原则 3：选择密切联系学生易接受、且有趣味、实用的数学建模内容，时机要选对、选准。

原则 4：有课时限制，多采用分散、课件演示方法。

二、大学数学教学中融入数学建模的方法和我们的做法

1．大学数学教学中融入数学建模的方法

法 1：作为一门单独课程开设（如数学模型或数学建模课程）。

法 2：作为一门综合课程开设（如数学实验或数学建模与数学实验、微积分与数学模型）。

法 3：在课程中增加若干专门（有关数模）章节。

法 4：在课程中增加可选择的数模案例（大例、中例（如数学建模实验）、小例）。

法 5：在课程中增加数学建模软件辅助。

法 6：编写（含相关数模）课程辅导材料布置学生选读、课外指导（如组织课外活动小组）。

法 7：对那些确有兴趣的学生课外加餐（如大学生数学建模协会会员）。

法 8：组织学校（院）大学生数学知识应用竞赛、数学建模竞赛等以赛促学。

法 9：举办公开讲座或系列讲座、专题讲座。

2. 我们的做法

(1) 首先我们设计了一个大学四年三阶段的数学建模教学工程方案，这是对一个大学生数学建模教育由浅入深的教育建模，《数学建模教学工程》为 1998～2000 年安徽省教育厅重点教研项目。

注：

1) 数学建模教学工程的理论和实践成果介绍（王庚 2001）。

2) 该成果获安徽省省级教研成果一等奖（2001 年）。

(2) 其次针对如何指导学生具体建模设计了一张“怎样建模”表。

注：“怎样建模”表及其应用参见本书第 20 讲。

(3) 然后适当地选择上述 9 种方法作具体的数学建模融入工作。

对象	课程名称	选择融入方法	资料、教材和软件
理、工、文学生	高等数学	法 4、法 5、法 6 综合运用	自编《高数辅导》，《Mathematica 入门》
理、工、文学生	线性代数	法 4、法 5	《数学的原理与实践》，应用数学方法软件包
计算机专业	计算方法	法 3	《计算方法与实习》
计算机专业	数理方程	法 4、法 5	Mathematica
数学、信息专业	解析几何	法 4、法 5	《数学的原理与实践》，应用数学方法软件包
数学、信息专业	数学分析	法 3	陈纪修《数学分析》
全校选修课（任）	数学建模	法 1	《实用计算机数学建模》，《经济管理数学模型》
计算机专业选修课（必）	数学建模	法 1	《实用计算机数学建模》
数学专业	数学建模与数学实验	法 2	《实用计算机数学建模》，《数学实验》（李尚志等）
数学建模协会会员	专题辅导	法 7、法 9	刊物《建模风云》
全校其他学生	课外活动	法 8、法 9	《实用计算机数学建模》
计算机，数学、信息专业	离散数学	法 3、法 4	《离散数学的结构与算法》

3. 融入工作的拓广和深化

(1) 上述工作已纳入了安徽省教育厅重点建设课程“工科高等数学”中作为其中子项目，该重点建设项目包括：数学系列课程、素材库建设、软件建设、试题库建设、数模和数学实验的融入等（1999～2003年）。

(2) 申报批准了省教育厅教研项目“工科高等数学与数学建模分层次教学的理论和实践”，该项目的指导思想是：考虑不同的专业不同的需要，教授有针对性的高等数学与数学建模，旨在各取所需。

(3) 作者正在改进上述工作，使之适合于财经类大学。

参 考 文 献

李大潜 .2001. 中国大学生数学建模竞赛（第二版）. 北京：高等教育出版社

王庚 .2003. 实用计算机数学建模 . 修订本 . 合肥：安徽大学出版社

王庚 .2001. 数学建模教学工程的理论和实践 . 数学的实践和认识，(4)

Wang Geng.2003. “How to Model Mathematicallly” Table and its Applications. Mathematical Modelling in Education and Culture: ICTMA10 England: Horwood Publishing Limited

23 关于大学数学素质教育的实施与开展

本报告首先阐述了数学素质的内涵以及大学数学素质教育的目的，其次探讨了大学数学素质教育的途径，并具体地设计了在两种途径下具体实施和开展的方法，最后作者也介绍了自己从事这些工作的一些体会和实践过的一些做法。

加强素质教育是21世纪教育改革的主旋律，媒体和教育主管部门一直都在强调重视素质教育，尽管从小学到高中毕业，我们都感觉到素质教育的欠缺，但真要我们具体实施和开展会感到问题很多。尤其是大学数学素质教育，由于数学学科的特点更使素质教育的开展困难重重。

一、数学素质的内涵

人的素质即人本身具有的品质。素质的内涵包括哪些内容并没有一个权威公认的概括，作为人的素质的一个重要方面的数学素质也是众说纷纭，本质上说数学素质不仅是指人的数学学历，更重要的是实际具有的数学文化水平。这里所说的数学文化水平，不是简单的数学文化知识，而是包括数学智力水平、掌握数学文化知识的程度、数学思想这三个要素的一个综合指标。其中数学智力水平是指观察、注意、记忆、思维、表达、创新等数学认知水平，这是属于主观能动方面的要素；数学文化知识既包括数学科学技术知识，也包括数学文化（数学史、方法、美学、哲学、教育学等）知识，它体现了人们占有数学知识的广度和深度；数学思想则包括对数学的态度，能否正确评价数学的社会作用、能否尊重数学、能否运用数学方法来分析、处理问题等多方面内容。

二、大学数学素质教育的目标

长期以来，在高校的数学教学过程中，已经形成了重视课堂理论教学，轻实践教学；教师重视学生数学考试成绩，轻视运用数学能力；学生也是重书本学习，轻实验。例如在高校中拥有数学实验室的寥寥无几。这样便导致了大学生对数学的一些错误认识和大学生数学知识结构的不完善，缺乏应有的应用数学知识技能和实践（实验）动手能力。学生毕业后对数学是既不知有何用也不知如何用(除了考研作为一门课外)。对于这样的状况，我们每位数学教师是值得反思的，

而纠正这种大学数学教育的偏差应成为高校数学教师与大学生自身在进行数学素质教育中的努力目标。

三、开展与实施大学数学素质教育的途径

如果将今天的数学教育比做“烧全鱼”，“鱼头”是如何从实际问题中提出数学问题方面的内容，“鱼尾”则是如何使用数学来解决实际问题方面的内容。传统的数学教育则是“烧鱼中段”，也就是主要着眼于数学内部的理论、结构和它们之间的逻辑关系。

围绕着如何“烧全鱼”给大学生，大学由于其管理与教学的特点和自由度大，使这种“烧全鱼”成为可能。具体开展与实施大学数学素质教育的途径如下。

1．在大学数学课堂（第一课堂）上进行数学素质教育

由于大学数学课学时数偏少，可能操作的方法如下。

法1：作为一门单独课程开设（如选修或新增正常课程：数学模型或数学建模、数学实验、数学软件、运筹学、应用数学方法、数学文化等课程）。

法2：作为一门综合课程开设（如数学建模与数学实验、微积分与数学模型），笔者称此法为“旧瓶装新酒”。

法3：在课程中增加若干专门（有关数学建模、数学实验、数学文化等）单元或章节。

法4：在课程中增加可选择的数学建模、数学实验、数学文化案例（大例、中例（如数学建模实验）、小例）。

法5：在课程中增加数学建模软件或数学软件辅助。

注：法3～5，笔者称其为“调制鸡尾酒”。

法6：在其他教学环节上补充相关的内容如：作业，引子课，布置课外研究，考试。

注：以上这些方法笔者都曾经采用过，但仍需进一步实践改进和完善，数学教师可根据教师自身的特点选用。

2．在大学数学第二课堂上进行数学素质教育

可以这样说：开展大学生课外科技活动，实乃是强化数学素质教育的重要途径。第二课堂是一个特别的课堂，它是指大学生的课外数学科技活动。试问在扩招的今天，我们的教师在第一课堂能认识（真正认识）几位学生，更别说真正培养，即使是名字也叫不出几位。一位教师的成功其标准理应看他培养了多少对社

会有用的人才，在大学数学教学活动中进行数学素质教育，显然不能不重视第二课堂。在第二课堂中如何进行数学素质教育呢？根据笔者的经验推荐以下三种方法：

1）开展数学科技活动（建立相关网站、编写课程辅导材料布置学生选读、课外指导（如组织课外活动小组、高年级小型学术讨论班等）、对那些确有兴趣的学生课外加餐（如对数学建模、数学文化、数学软件、数学应用感兴趣的大学生等）），等等；

2）参加或举办大学生数学科技竞赛（国际、全国、省级、校级的数学建模竞赛、数学竞赛、数学小论文竞赛等）；

3）综合进行数学素质教育：举办校园数学文化活动（如混合年级、系别，举办公开讲座或系列讲座、专题讲座、座谈会、研讨会、报告会等丰富多彩的数学文化活动）。

四、工作体会与反思

笔者在高校教授数学已 21 年，开设课程达 20 余门，1995 年开始数学建模带队，9 年中带了约 50 队学生参加中国和美国大学生数学建模竞赛以及中国大学生挑战杯，为大学生开设了 40 余次不同类型的课外数学讲座，多次担任学生各种数学协会以及各种数学兴趣小组的指导教师，并对上述的大部分方法做过一定的实践，笔者的体会是：

1）这是一种真正的教与学的经历，它需要大量投入，这是值得的。

2）要取得好成效，方法的选择要适当。

3）实施数学素质教育过程中使自己的教学研究更上了一层楼，也使自己的科研工作如虎添翼。自己主持的教科研项目、成果多项都与此相关。

4）实施数学素质教育也使自己的教学水平有了很大的提高。

让我们认真反思一下自己的学习生涯，最深的感受是虽然第一课堂的学习使我们的素质教育受益匪浅，但另一个不可忽视的事实是我们现在的能力最重要的部分往往来自于第一课堂以外第二课堂或其他方面。翻开科学家（包括数学家）的传记，在这方面会有更深的感触。虽然从纯功利的角度考虑，素质教育的开展与实施未必具有吸引力，但放在做一个真正的称职的教师这一角度思考，不进行素质教育就很难培养甚至培养不出优秀的人才，那我们为什么还要从事教师——人类灵魂工程师这一伟大的职业呢？

参 考 文 献

段泽球等 .2001. 大学生科技竞赛指南 . 长沙：中南大学出版社
冯克勤 .1998. 数学教育的关键是彻底转变观念 . 高等数学研究，12：2～5
李大潜 .2001. 中国大学生数学建模竞赛（第二版）. 北京：高等教育出版社